LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
40731 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

LEÇONS
SUR LES
THÉORIES GÉNÉRALES
DE
L'ANALYSE

PAR

René BAIRE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

TOME II.

VARIABLES COMPLEXES. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

PRÉFACE.

Cette deuxième Partie de mon Cours a été écrite dans le même esprit que la première. Laissant de côté les détails accessoires, je me suis proposé de mettre le lecteur en possession des faits mathématiques vraiment essentiels, et j'ai cherché à les relier entre eux par des méthodes aussi directes que possible. C'est dire que, dans ce Volume comme dans le précédent, la question de l'ordonnance des matières m'a préoccupé tout autant que le choix des matières elles-mêmes. Tout se tient en Mathématiques, peut-on dire; c'est une raison de plus pour rechercher si tel groupement de faits n'est pas plus conforme à la nature des choses que tel autre, justifié seulement par des habitudes acquises. Il est certain, par exemple, que la division surannée de l'Analyse en Calcul différentiel et Calcul intégral n'a plus aucune raison d'être. Par contre, on n'insistera jamais assez sur la distinction fondamentale qui existe entre l'Analyse des variables réelles et l'Analyse des variables complexes. Ce sont là presque deux sciences distinctes, qui, bien entendu, se prêtent un mutuel appui, appui d'ailleurs d'autant plus efficace qu'on aura mieux insisté sur la différence des points de départ.

Le Chapitre IV, par lequel s'ouvre le présent Volume, est précisément consacré aux fonctions analytiques. Ici surtout, les idées que je viens d'exposer d'une manière générale prennent une importance particulière. Il est généralement admis qu'on doit, dans l'exposition de cette partie de la Science, se placer au point de vue, soit de l'un, soit de l'autre des fondateurs de la théorie, ce qui conduit à reprendre les mêmes résultats par trois

ou quatre procédés distincts. Il me semble qu'on peut avantageusement modifier cette méthode. Un cours d'Analyse n'est pas un cours d'histoire de l'Analyse; le fait d'éviter systématiquement de mélanger les théories de divers auteurs, sans doute pour mieux respecter leur œuvre, me paraît provenir d'un scrupule traditionnaliste que je ne partage pas. A coup sûr, il est intéressant de savoir que, à telle époque, tel géomètre est arrivé à construire tout un corps de doctrines, indépendamment des travaux de ses contemporains. Mais, à mon avis, le meilleur hommage à rendre à nos devanciers est encore de continuer leur œuvre; c'est pourquoi j'estime que nous devons aujourd'hui chercher à opérer, non plus une simple juxtaposition, mais une véritable synthèse entre les diverses méthodes qu'ils nous ont léguées, de manière à en construire une nouvelle, qui participe des avantages de toutes les autres.

C'est en partant de ces idées que j'ai cherché à utiliser en même temps la notion d'intégrale de variables complexes et la notion de série entière. D'ailleurs, le résultat le plus essentiel de la théorie des fonctions analytiques réside précisément dans ce fait qu'une fonction qui a la propriété d'avoir une dérivée est par cela même représentable par une série entière. C'est donc la préparation et la démonstration de ce théorème fondamental qui font l'objet des premiers paragraphes du Chapitre. Une fois cette identité établie, on se trouve en possession des avantages de l'une et l'autre méthode, puisque, dès qu'on peut, par un moyen quelconque, montrer qu'une fonction satisfait aux conditions d'holomorphie, il en résulte que son développement taylorien est applicable, ce qui permet de l'utiliser dans les calculs. Ce même théorème fondamental, établi d'abord pour le cas d'une variable, est étendu plus loin au cas de plusieurs, au moyen d'une transformation très simple, qui ne nécessite pas l'emploi des intégrales multiples de variables complexes.

En ce qui concerne le choix des démonstrations, je ferai remarquer qu'il n'y a aucune raison plausible, sous prétexte qu'on est dans le domaine complexe, pour s'interdire de revenir à la décomposition en parties réelle et imaginaire; en fait, ce retour aux variables réelles fournit des démonstrations très

simples et très naturelles de plusieurs résultats fondamentaux, en particulier de ceux qui sont des extensions de théorèmes relatifs aux fonctions réelles, tels que, par exemple, le principe des fonctions composées, celui de la dérivation des intégrales par rapport à des paramètres, etc.

C'est dans ce même Chapitre que je traite la théorie des séries de fonctions. Bien qu'à mon avis l'introduction de termes nouveaux ne doive se faire qu'avec une extrême prudence, il m'a paru indispensable de caractériser par une locution brève le cas le plus simple et de beaucoup le plus courant des séries uniformément convergentes, celui des séries dont les termes sont moindres en module que des nombres positifs formant série convergente (ce qu'on appelle quelquefois *critère de Weierstrass*). J'appelle ces séries *normalement* convergentes, et j'espère qu'on voudra bien excuser cette innovation. Un grand nombre de démonstrations, soit dans la théorie des séries, soit plus loin dans la théorie des produits infinis, sont considérablement simplifiées quand on met en avant cette notion, beaucoup plus maniable que la propriété de convergence uniforme.

Dans le Chapitre V, consacré aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles, je me suis contenté d'exposer les fondements de la théorie, en m'attachant surtout à faire connaître les cas, en petit nombre, où l'intégration peut être effectuée. J'ai tenu à indiquer, par un exemple classique emprunté à la Physique, comment les équations aux dérivées partielles interviennent le plus souvent dans les applications, quel rôle essentiel jouent les hypothèses complémentaires, et comment on doit en faire usage pour la résolution des problèmes posés.

Le Chapitre VI contient les applications géométriques. J'y expose les propriétés les plus importantes de la théorie des courbes et des surfaces, de manière à préparer le lecteur à une étude plus approfondie de la Géométrie supérieure. Dans l'étude des surfaces, j'ai donné le plus souvent la préférence aux démonstrations qui utilisent les coordonnées curvilignes générales, à cause des avantages de symétrie qu'elles présentent, mais j'ai également mis à profit l'étude du cas où l'équation est résolue

par rapport à une des coordonnées, cette seconde méthode se prêtant mieux à l'établissement de certains théorèmes.

Enfin, voulant donner au moins une application des théories générales exposées dans l'Ouvrage, j'ai, dans un dernier Chapitre, exposé les principes essentiels de la théorie des fonctions elliptiques.

M. Cousson a continué de m'apporter son concours le plus dévoué pour la rédaction et la mise au point de ce second Volume. M. Denjoy, agrégé de Mathématiques, a bien voulu aussi m'assister dans le travail de revision des épreuves. Je leur en adresse ici mes plus affectueux remercîments. Enfin, si tout le monde sait combien est précieuse à un auteur scientifique la collaboration de M. Gauthier-Villars, il convient de dire que la chose apparaît mieux encore peut-être lorsqu'il s'agit d'un Livre destiné à l'enseignement, où tous les détails de l'exécution doivent concourir au but à atteindre.

Dijon, le 10 avril 1908.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

ERRATA.

Tome I.

Page 145, note : ligne 1, *supprimer* positives.
» » ligne 3, *lire* le rapport ... est inférieur *en module* à 1.
» » ligne 4, *lire* ... par des nombres inférieurs *en module* à 1.

Tome II.

Page 28, avant le dernier alinéa, *ajouter :* La série T a pour somme S.Σ, limite de $S_n . \Sigma_n$.

Page 212, n° 418, *remplacer* la formule donnant R_1^2 par

$$R_1^2 = \frac{ds_1^2}{\left[d\left(\frac{dx}{ds_1}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds_1}\right)\right]^2} = \frac{ds_1^2}{(1+k^2)(d\alpha^2 + d\beta^2)},$$

d'où

$$\frac{R}{R_1} = 1 + k^2.$$

Page 226, n° 432, dernière ligne, *au lieu de* c'est une parabole, *lire* l'indicatrice est parabolique.

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

I. — Nombres complexes.

205. Les nombres *complexes* ou *imaginaires* s'introduisent en Algèbre à propos de l'étude des équations algébriques de degré supérieur à 1. Par définition, un nombre complexe z est une expression de la forme $a + bi$, a et b étant des nombres réels.

On définit les quatre opérations arithmétiques élémentaires sur ces nombres de la façon suivante. L'addition, la soustraction, la multiplication sont définies par des conventions qui peuvent se résumer ainsi : Un polynome par rapport à des nombres complexes

$$z = a + bi, \qquad z' = a' + b'i, \qquad \ldots$$

est le nombre complexe obtenu en effectuant sur ces nombres les calculs indiqués, suivant les règles ordinaires du calcul algébrique, et remplaçant dans le résultat i^2 par -1.

Cette convention peut être remplacée par la suivante : On considère comme *équivalents* deux polynomes en i de la forme

$$A_0 + A_1 i + A_2 i^2 + \ldots, \qquad B_0 + B_1 i + B_2 i^2 + \ldots,$$

les nombres A et B étant réels, si les restes de la division de ces deux polynomes par i^2+1, qui sont du premier degré en i, sont identiques. En effet, les puissances de i :

$$(1) \qquad i^{4n}, \quad i^{4n+1}, \quad i^{4n+2}, \quad i^{4n+3},$$

où n est un entier positif ou nul, sont, au sens précédent, équivalentes respectivement à

$$(2) \qquad 1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

On en déduit que le polynome $A_0 + A_1 i + \ldots$ est équivalent au nombre complexe obtenu en y remplaçant les expressions (1) par les expressions (2) correspondantes : cela revient à remplacer i^2 par -1 dans ce polynome.

La seconde forme donnée à la convention montre que les lois du calcul algébrique relatives à l'addition, la soustraction, la multiplication s'appliquent aux nombres complexes.

206. Deux nombres complexes $a+bi$, $a'+b'i$ sont dits *égaux* s'ils sont équivalents, c'est-à-dire si l'on a à la fois $a=a'$, $b=b'$.

Un nombre complexe $a+bi$ est *nul* s'il est équivalent à zéro, c'est-à-dire si l'on a $a=0$, $b=0$.

Deux nombres $a+bi$, $a'+b'i$ sont dits *opposés* ou égaux et de signes contraires si leur somme est nulle, c'est-à-dire si $a'=-a$, $b'=-b$.

Quand, dans un nombre complexe $a+bi$, on a $b=0$, on dit que le nombre complexe se réduit à sa partie réelle. Si l'on a $a=0$, on dit que le nombre est imaginaire pur.

Deux nombres complexes sont dits *conjugués* s'ils ont même partie réelle et pour coefficients de i deux nombres opposés.

207. Étant donnés deux nombres complexes $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$, cherchons un nombre complexe $c+di$ qui, multiplié par z', reproduise z. On doit avoir, d'après la règle de multiplication,

$$a'c-b'd=a, \qquad b'c+a'd=b.$$

Ce sont deux équations linéaires en c et d. Le déterminant des coefficients des inconnues est $a'^2+b'^2$, qui est différent de zéro dès que z' l'est ; c et d sont donc déterminés par ces équations ; *il existe*

un nombre $c+di$ et un seul vérifiant la condition requise : c'est le *quotient* de z par z'.

Si z est différent de zéro et z' nul, il n'y a pas de nombre complexe qui, multiplié par z', reproduise z.

En effectuant sur des nombres complexes les quatre opérations arithmétiques, on obtient des *fractions rationnelles*.

208. On appelle *module* d'un nombre complexe $z = a + bi$ la quantité positive ou nulle $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. On reconnaît que, pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que son module soit nul. Nous désignerons par $|z|$ le module de z.

On démontre que :

1° Le module de la somme algébrique de plusieurs nombres complexes est inférieur ou égal à la somme des modules.

2° Le module de la différence de deux nombres complexes est supérieur ou égal à la différence des modules.

3° Le module d'un produit est égal au produit des modules.

4° Le module d'un quotient est égal au quotient du module du dividende par le module du diviseur.

D'après la Trigonométrie, on sait qu'étant donnés deux nombres a et b, il y a un angle φ, déterminé à un multiple de 2π près, tel que l'on a

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\varphi, \qquad b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\varphi.$$

L'angle φ ainsi déterminé est dit l'*argument* du nombre complexe $a + bi$.

Le produit de plusieurs nombres complexes a pour argument la somme des arguments des différents facteurs.

209. On représente géométriquement les nombres complexes en considérant dans le plan deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy. Au nombre $a + bi$ on fait correspondre le point M d'abscisse a et d'ordonnée b.

Le module du nombre $a + bi$ a pour valeur la longueur OM, et son argument est l'angle, défini à un multiple de 2π près, de OM avec Ox.

210. *Notion de limite.* — Un nombre complexe $z_n = a_n + ib_n$, variable avec l'entier n, a pour limite $z = a + ib$ si l'on a simultanément $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

Cela revient à dire que le module de la différence $(z_n - z)$ doit tendre vers zéro.

En effet, on a

$$z_n - z = a_n - a + i(b_n - b),$$

d'où

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}.$$

Pour que $|z_n - z|$ tende vers zéro, il faut et il suffit que $(a_n - a)$ et $(b_n - b)$ tendent vers zéro.

Le théorème de Cauchy sur les limites (t. I, n° 22, p. 15) s'applique aux nombres complexes et s'énonce ainsi : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres complexes* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *ait une limite est qu'à tout nombre positif* ε *corresponde un entier* p *tel que les conditions* $\mu > p$, $\nu > p$ *entraînent* $|z_\mu - z_\nu| < \varepsilon$.

En effet, en posant $z_n = a_n + ib_n$, la condition $|z_\mu - z_\nu| < \varepsilon$ s'écrit

$$|(a_\mu - a_\nu) + i(b_\mu - b_\nu)| < \varepsilon.$$

Cette condition, supposée remplie, entraîne

$$(1) \qquad |a_\mu - a_\nu| < \varepsilon, \qquad |b_\mu - b_\nu| < \varepsilon.$$

Donc a_n et b_n tendent vers des limites a et b; par conséquent, z_n tend vers $a + bi$.

Réciproquement, si z_n a une limite $a + bi$, on a

$$\lim a_n = a, \qquad \lim b_n = b.$$

Quand μ et ν dépassent une certaine valeur, les conditions (1) sont vérifiées; il en résulte

$$|z_\mu - z_\nu| < 2\varepsilon,$$

ce qui montre que la condition du théorème de Cauchy est vérifiée.

II. — Fonctions de variables complexes.

211. Soit $z = x + iy$ une variable complexe. On est conduit à considérer comme fonction de z tout nombre complexe u de la forme suivante :

$$u = P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

P et Q étant deux fonctions réelles de x, y.

Supposons que P et Q soient fonctions *continues* de x, y dans un

certain domaine D du plan des x, y. Si z prend une suite de valeurs $x_n + iy_n$ tendant vers une valeur fixe $x + iy$, les nombres $P(x_n, y_n)$, $Q(x_n, y_n)$ tendent vers $P(x, y)$, $Q(x, y)$, de sorte que $u(z_n)$ tend vers $u(z)$. On exprime ce fait en disant que u est fonction *continue* de z.

Cela posé, donnons à z deux valeurs différentes $z = x + iy$, $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$.

Soient u et $u + \Delta u$ les valeurs correspondantes de la fonction. On a $\Delta u = \Delta P + i\,\Delta Q$ et, par suite,

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{\Delta x + i\,\Delta y}.$$

Introduisons l'hypothèse que P *et* Q *ont, par rapport à* x *et* y, *des dérivées partielles du premier ordre continues dans le domaine* D, et cherchons dans quelles conditions il y a, pour le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$, une limite déterminée quand Δx et Δy tendent vers zéro d'une manière quelconque.

Considérons d'abord deux cas particuliers :

1° Si $\Delta y = 0$, c'est-à-dire si x varie seul, on a, quand Δx tend vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2° Si $\Delta x = 0$, c'est-à-dire si y varie seul, on a, quand Δy tend vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{i\,\Delta y} = -i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Une première condition pour que le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tende vers une limite déterminée, quand Δx et Δy tendent vers zéro d'une façon quelconque, est que les deux nombres complexes $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, $-i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je dis que ces conditions sont suffisantes. En effet, supposons-les remplies. Δx et Δy étant quelconques, on a, d'après la formule des

accroissements finis,

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial x}(x+\theta\,\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}(x+\theta\,\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y)\,\Delta y,$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x}(x+\theta'\,\Delta x,\ y+\theta'\,\Delta y)\,\Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}(x+\theta'\,\Delta x,\ y+\theta'\,\Delta y)\,\Delta y,$$

θ et θ' étant compris entre o et 1.

Les valeurs des dérivées qui entrent dans ces formules peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)+\varepsilon_1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)+\varepsilon_2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)+\varepsilon_3, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)+\varepsilon_4,$$

et par suite de la continuité de ces quatre dérivées partielles, étant donné un nombre positif ε, il est possible de trouver un nombre positif α tel que, dès que l'on a

$$|\Delta x| < \alpha, \qquad |\Delta y| < \alpha,$$

les quatre nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ soient en module inférieurs à ε. Cela étant, on a $\Delta u = \Delta P + i\,\Delta Q$, c'est-à-dire

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u = {} & \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\Delta y \\ & + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + i(\varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y). \end{aligned} \right.$$

D'après les relations (1), on peut remplacer $\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$ par $i\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Les deux premiers termes de Δu deviennent

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\Delta x + i\,\Delta y),$$

de sorte qu'en divisant par Δz les deux membres de (2) on a

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta z} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta z} + i\varepsilon_3\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\varepsilon_4\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ sont au plus égaux en module à 1; si Δx et Δy tendent vers zéro d'une manière quelconque, les nombres ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 tendent vers zéro. On a, dans ces conditions,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On exprime ce résultat en disant qu'il y a pour u *une dérivée par rapport à z* et que u est *holomorphe par rapport à z au point considéré.* On désigne cette dérivée par u'_z.

On appelle *différentielle* de u et l'on désigne par du le produit de la dérivée u'_z par l'accroissement Δz de la variable. En considérant z lui-même comme fonction de z, on est conduit à écrire $dz = \Delta z$.

On modifie alors la notation précédente et l'on pose

$$du = u'_z\, dz$$

avec

$$dz = dx + i\, dy.$$

On déduit de là une nouvelle manière d'écrire la dérivée u'_z:

$$u'_z = \frac{du}{dz}.$$

212. Nous appellerons *fonction holomorphe* de z, dans un domaine D, toute fonction continue par rapport à z et ayant une dérivée déterminée en tout point du domaine D. Les conditions (1) seront appelées *conditions d'holomorphie.*

On est certain qu'une fonction $f(z)$ est holomorphe si l'on peut d'une manière quelconque montrer que le rapport $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ tend vers une limite déterminée quand h tend vers zéro.

Par exemple, z^m, m étant entier et positif, est fonction holomorphe dans tout le plan, car, d'après la théorie de la division, on a

$$\frac{(z+h)^m - z^m}{h} = m z^{m-1} + h\varphi(z, h),$$

$\varphi(z, h)$ étant un polynome. En vertu des propriétés des polynomes, on vérifie directement que le module de φ est borné dans tout domaine borné et l'on en déduit que le premier membre a pour limite, quand h tend vers zéro, l'expression $m z^{m-1}$.

213. *Fonctions de plusieurs variables complexes.* — Soient plusieurs variables complexes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ...; on dit que le nombre complexe

$$u = P(x, y, x', y', \ldots) + i\, Q(x, y, x', y', \ldots)$$

est *fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des variables z, z', ... quand ces variables sont respectivement dans des domaines*

D, D′, ... *de leurs plans* si P et Q sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables réelles $x, y, x', y', \ldots$ admettant des dérivées partielles du premier ordre, elles-mêmes continues, et si u admet une dérivée par rapport à chacune des variables complexes $z, z', \ldots$.

Il faut et il suffit pour cela qu'on ait l'ensemble des conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial y'}, \qquad \ldots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y'} = -\frac{\partial Q}{\partial x'}, \qquad \ldots.$$

Les dérivées de u se représentent par $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z'}, \ldots$.

214. *Fonctions composées.* — Soit $u = F(z, z', \ldots)$ une fonction holomorphe des variables complexes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ... quand $z, z', \ldots$ sont dans certaines régions de leurs plans.

Supposons que $z, z', \ldots$, au lieu d'être variables indépendantes, soient fonctions holomorphes de nouvelles variables complexes

$$t = \theta + i\tau, \qquad t_1 = \theta_1 + i\tau_1, \qquad \ldots;$$

u peut être considérée comme fonction de $t, t_1, \ldots$ par l'intermédiaire de $z, z', \ldots$. On dit que c'est une *fonction composée* de t, $t_1, \ldots$. Je dis que *u est fonction holomorphe par rapport à $t, t_1, \ldots$.*

En effet, posons $u = P(x, y, \ldots) + iQ(x, y, \ldots)$.

Lorsqu'on remplace $z, z', \ldots$ par leurs valeurs en fonction de t, $t_1, \ldots$, P et Q deviennent des fonctions composées des variables réelles $\theta, \tau, \theta_1, \tau_1, \ldots$. Formons les dérivées de ces fonctions par rapport à θ et τ par exemple. On a

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \right), \qquad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \right),$$
$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} \right), \qquad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} \right),$$

les signes $\sum$ s'appliquant aux différents couples de variables (x, y), (x', y'), ...

Comme u est fonction holomorphe de z, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De même, z étant fonction holomorphe de t, on a

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial y}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \tau} = -\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Par suite de ces relations, on constate qu'il y a identité entre $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$, ainsi qu'entre $\frac{\partial P}{\partial \tau}$ et $-\frac{\partial Q}{\partial \theta}$. Donc u a, par rapport à la variable complexe $t = \theta + i\tau$, une dérivée déterminée, à savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial \theta} + i\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} \right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} + i\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \sum \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ainsi, u est fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des variables t, t_1, t_2, ..., et ses dérivées par rapport à chacune de ces variables sont données par la règle habituelle des fonctions composées.

215. Comme cas particulier, on voit que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes dont les dérivées s'obtiennent par les règles applicables aux fonctions de quantités réelles.

Un *polynome* par rapport à plusieurs variables z, z', ... est fonction *holomorphe* de ces variables, chacune d'elles étant arbitraire dans son plan.

Considérons la fonction d'une seule variable $u = \frac{1}{z}$. Elle est holomorphe dans tout le domaine D obtenu en supprimant du plan des z un cercle de centre O. C'est en effet le quotient des deux fonctions holomorphes 1 et z, et z est différent de zéro dans D.

Une *fonction rationnelle* de plusieurs variables complexes, c'est-à-dire une fonction égale au quotient de deux polynomes, est holomorphe si les variables z, z', ... sont assujetties à rester dans des domaines D, D', ... de leurs plans respectifs choisis de telle façon que le dénominateur de la fraction ne soit jamais nul.

216. *Fonctions implicites.* — Considérons une équation de la forme

$$F(z, z', \ldots) = 0. \tag{1}$$

F étant fonction holomorphe des variables z, z', ... quand ces variables sont dans certains domaines D, D', ... de leurs plans respectifs. Soient z_0, z'_0, ... un système de valeurs de z, z', ... intérieures à D, D', ... Comme dans le cas des variables réelles, nous appellerons *point* un tel système de valeurs. Supposons que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, z'_0, \ldots) \neq 0.$$

Je dis que, dans ces conditions, on peut, au voisinage du point $(z_0, z'_0, \ldots)$, résoudre l'équation (1) par rapport à z, c'est-à-dire trouver pour z une fonction holomorphe des variables z', z'', ... quand z', z'', ... seront dans certains domaines contenant z'_0, z''_0, ..., cette fonction satisfaisant à l'équation (1) et se réduisant à z_0 quand z', z'', ... se réduisent à z'_0, z''_0, ...

Soient $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ..., $F = P + iQ$.

Résoudre l'équation (1) revient à résoudre par rapport à x, y le système

$$(2)\qquad \begin{cases} P(x, y, x', y', \ldots) = 0, \\ Q(x, y, x', y', \ldots) = 0. \end{cases}$$

D'après la théorie des fonctions implicites de variables réelles (t. I, p. 104), il faut étudier le déterminant fonctionnel de P et Q par rapport à x, y, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

En vertu des relations d'holomorphie, il est égal à

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2;$$

or, on a

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

et cette dérivée est différente de zéro au point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$; il en résulte que $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ne sont pas tous deux nuls en ce point. Donc le déterminant fonctionnel précédent est différent de zéro pour le système de valeurs $(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \ldots)$. Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Des équations (2), on peut tirer pour x, y deux fonctions continues des

autres variables $x', y', x'', y'', \ldots$ définies dans certains intervalles de variation

$$|x'-x'_0| < \alpha, \quad |y'-y'_0| < \alpha, \quad |x''-x''_0| < \alpha, \quad \ldots$$

ces fonctions se réduisant à x_0, y_0 quand $x', y', x'', \ldots$ se réduisent à $x'_0, y'_0, x''_0, \ldots$.

En revenant aux variables complexes, on voit que z est fonction déterminée de $z', z'', \ldots$ et se réduit à z_0 quand $z', z'', \ldots$ se réduisent à $z'_0, z''_0, \ldots$.

Je dis que cette fonction z a des dérivées partielles par rapport à $z', z'', \ldots$. Montrons-le par exemple pour z'. On a, en différentiant les équations (2),

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial x'}dx' + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial x'}dx' + \ldots = 0.$$

Multiplions les deux membres de la seconde équation par i et ajoutons. On a, en tenant compte des relations d'holomorphie,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(dx + i\,dy) + \ldots = 0$$

ou

$$(3)\qquad \frac{\partial F}{\partial z}(dx + i\,dy) + \frac{\partial F}{\partial z'}(dx' + i\,dy') + \ldots = 0.$$

Supposons que les variables indépendantes $z', z'', \ldots$ reçoivent des valeurs fixes, sauf z'. L'équation (3) montre que, dans ces conditions, $\dfrac{dx + i\,dy}{dx' + i\,dy'}$ a une limite déterminée quand $dx' + i\,dy'$ tend vers zéro. Donc z a par rapport à z' une dérivée donnée par la formule

$$\frac{\partial z}{\partial z'} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z'}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

C'est la même règle que pour les variables réelles.

Ainsi z *est fonction holomorphe* de $z', z'', \ldots$.

217. Supposons maintenant qu'on ait n équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(z, z', \ldots, u, u', u'', \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(z, z', \ldots, u, u', u'', \ldots) = 0. \end{array}\right.$$

les variables u étant au nombre de n et les F étant fonctions holomorphes des variables complexes z et u dans certains domaines. Soit $z_0, z'_0, \ldots, u_0, u'_0, \ldots$ un système de valeurs des variables vérifiant ces équations. Supposons que le déterminant fonctionnel des F par rapport aux u soit différent de zéro pour ce point, soit

$$(2)\qquad \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u, u', u'', \ldots)} \neq 0.$$

Je dis que l'on peut trouver pour $u, u', u'', \ldots$ un système de fonctions holomorphes de $z, z', z'', \ldots$ au voisinage du point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$, satisfaisant aux équations (1) et se réduisant pour $z_0, z'_0, z''_0, \ldots$ à $u_0, u'_0, u''_0, \ldots$. Le théorème est démontré pour $n = 1$. Admettons-le pour $n - 1$ et démontrons-le pour n.

D'après (2), l'un au moins des mineurs d'ordre $(n - 1)$ du déterminant fonctionnel des F par rapport aux u est différent de zéro pour le point considéré. On peut supposer que c'est

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u', u'', \ldots)}.$$

On peut résoudre les $(n - 1)$ premières équations (1) par rapport à $u', u'', \ldots$ et exprimer ces $(n - 1)$ variables par des fonctions holomorphes de $z, z', z'', \ldots$ et u. Soient par exemple

$$(3)\qquad u' = \varphi'(z, z', \ldots, u), \qquad u'' = \varphi''(z, z', \ldots, u), \qquad \ldots.$$

Portons ces expressions de $u', u'', \ldots$ dans la fonction F_n, et soit $\Phi(z, z', \ldots, u)$ la fonction obtenue. Φ est fonction holomorphe et l'on a (*cf.* t. I, p. 106)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u, u', u'', \ldots)} : \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u', u'', \ldots)}.$$

Donc, pour le point $(z_0, z'_0, \ldots, u_0, u'_0, \ldots)$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \neq 0.$$

On peut donc résoudre l'équation

$$(4)\qquad \Phi(z, z', \ldots, u) = 0$$

par rapport à u, c'est-à-dire trouver pour u une fonction holomorphe de $z, z', z'', \ldots$ au voisinage du point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$, satisfaisant à l'équation (4) et se réduisant à u_0 quand $z, z', z'', \ldots$ se

réduisent à $z_0, z'_0, z''_0, \ldots$. En remplaçant u par cette fonction dans les équations (3), on obtient pour $u, u', u'', \ldots$ des fonctions holomorphes de $z, z', z'', \ldots$ vérifiant les équations (1).

On voit que le système (1) est résolu par rapport aux u, la proposition ayant le même sens que pour les fonctions de variables réelles, en remplaçant la condition pour une fonction d'être continue et pourvue de dérivées par la condition d'être holomorphe dans un certain domaine.

218. *Fonctions inverses.* — En particulier, soit une fonction holomorphe de z

$$u = f(z).$$

Considérons cette relation comme une équation en z; pour la résoudre par rapport à z, posons $F(z) = f(z) - u$; il s'agit de résoudre l'équation

$$F(z) = 0.$$

On pourra le faire au voisinage de tout point z_0, pour lequel $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Mais $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est autre que $\frac{\partial f}{\partial z}$. Donc, au voisinage de tout point z_0 tel que $\frac{\partial f}{\partial z_0} \neq 0$, on peut considérer z comme fonction déterminée et holomorphe de u. On dit que c'est la *fonction inverse* de f; soit

$$z = \varphi(u)$$

cette fonction. On constate, en dérivant par rapport à z, que l'on a

$$\varphi'(u) = \frac{1}{f'(z)}.$$

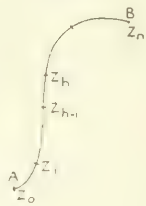
219. De même que pour les variables réelles, on peut définir les fonctions *dépendantes* et *indépendantes* de variables complexes, et l'on peut établir pour ces fonctions les résultats obtenus pour les fonctions dépendantes et indépendantes de variables réelles (*cf.* t. I, p. 108-112).

III. — Intégrales de variables complexes.

220. Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe de z dans un domaine D. Considérons un arc de courbe L allant de A à B, et ayant en chaque point une tangente (*fig.* 18); marquons sur cet arc,

en allant par exemple de A à B, des points intermédiaires correspondant aux valeurs $z_0, z_1, \ldots, z_h, \ldots, z_n$ de z, z_0 correspondant au point A, z_n au point B.

Fig. 18.



Posons $z_h = x_h + iy_h$. Prenons sur l'arc (z_{h-1}, z_h) un point arbitraire ζ_h et soit $\zeta_h = \xi_h + i\eta_h$. Formons la somme

$$(1) \qquad \sum_{h=1,\ldots,n} f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1}),$$

ou, en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire,

$$\sum [P(\xi_h, \eta_h)(x_h - x_{h-1}) - Q(\xi_h, \eta_h)(y_h - y_{h-1})]$$
$$+ i \sum [Q(\xi_h, \eta_h)(x_h - x_{h-1}) + P(\xi_h, \eta_h)(y_h - y_{h-1})].$$

Si l'on suppose que la loi de partage de l'arc AB varie de façon que la plus grande distance des points z_{h-1}, z_h tende vers zéro, cette somme tend, d'après la théorie des intégrales curvilignes, vers une limite déterminée qui est

$$\int_L P\,dx - Q\,dy + i \int_L Q\,dx + P\,dy.$$

Cette expression est ce que l'on obtiendrait si, dans l'intégrale $\int f(z)\,dz$, on remplaçait f par $P + iQ$, dz par $dx + i\,dy$. On convient de la représenter par

$$\int_L f(z)\,dz \quad \text{ou} \quad \int_{AB} f(z)\,dz,$$

et l'on dit que c'est *l'intégrale de la fonction de variable complexe $f(z)$ prise le long de l'arc* AB.

221. *Remarques.* — 1° On reconnaît, d'après cette définition,

que, si C est un point de l'arc AB, on a

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AC} f(z)\,dz + \int_{CB} f(z)\,dz.$$

Si une courbe est formée par la réunion bout à bout d'arcs remplissant les conditions requises, la courbe elle-même ne les remplissant pas, l'intégrale de $f(z)$ est, par définition, la somme des intégrales prises le long des arcs partiels.

2° Si l'on change le sens de parcours sur l'arc AB, on a

$$\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz.$$

3° Si L est un contour *fermé*, $\int_{L} f(z)\,dz$ est indépendante du point de départ, mais dépend du sens du parcours, et est multipliée par -1 si ce sens est changé.

4° *Si* M *est la borne supérieure du module de* $f(z)$ *sur l'arc* AB, *on a*

$$\left|\int_{L} f(z)\,dz\right| \leqq \text{M. longueur L.}$$

En effet, remarquons que la distance des deux points z_{h-1}, z_h est égale au module de la différence $z_h - z_{h-1}$. On a donc

$$|f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1})| \leqq \text{M. distance } z_{h-1}z_h \leqq \text{M. arc } z_{h-1}z_h.$$

En donnant à h les valeurs successives 1, 2, ..., n, et en ajoutant membre à membre les inégalités obtenues, on trouve

$$\left|\sum f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1})\right| \leqq \text{M. arc L.}$$

La somme (1) étant au plus égale en module à M. arc L, sa limite, qui est l'intégrale $\int_{L} f(z)\,dz$, satisfait à la même condition.

5° Supposons l'arc L défini par des équations de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

t étant un paramètre réel. Pour calculer $\int_{L} f(z)\,dz$ ou encore $\int_{L} P\,dx - Q\,dy + i\int_{L} Q\,dx + P\,dy$, on doit, dans chaque intégrale curviligne, exprimer P et Q en fonction de t et remplacer dx par

$\varphi'(t)\,dt$, dy par $\psi'(t)\,dt$. Cela revient à remplacer, dans $\int_L f(z)\,dz$, z par $\varphi + i\psi$ et dz par $(\varphi' + i\psi')\,dt$, puis à effectuer les calculs et séparer ensuite la partie réelle et le coefficient de i.

222. *Fonctions primitives.* — Soit un champ C dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Les expressions

$$P\,dx - Q\,dy, \quad Q\,dx + P\,dy$$

sont des différentielles exactes (t. I, p. 138), en vertu des conditions

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Il existe donc des fonctions $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$ telles qu'on a, dans C,

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial y} = P, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} = Q.$$

D'après ces relations, $P_1 + iQ_1$ est une fonction holomorphe de z dans C, soit $F(z)$, et l'on a

$$F'(z) = \frac{\partial P_1}{\partial x} + i\frac{\partial Q_1}{\partial x} = P + iQ = f(z).$$

D'autre part, d'après la théorie des intégrales curvilignes (t. I, p. 225), on a, en supposant l'arc AB contenu dans C, les points A et B étant $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$,

$$\int_{AB} P\,dx - Q\,dy = P_1(x, y) - P_1(x_0, y_0),$$

$$\int_{AB} Q\,dx + P\,dy = Q_1(x, y) - Q_1(x_0, y_0),$$

d'où résulte, par combinaison,

$$\begin{aligned}\int_{AB} f(z)\,dz &= P_1(x, y) + i\,Q_1(x, y) - [P_1(x_0, y_0) + i\,Q_1(x_0, y_0)]\\ &= F(z) - F(z_0).\end{aligned}$$

L'intégrale du premier membre est prise sur un chemin quelconque joignant z_0 à z et contenu dans C. On la désigne aussi par $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

On dit que $F(z)$ est une *fonction primitive* de $f(z)$.

Deux fonctions primitives de $f(z)$ diffèrent par une constante, car leur différence Φ doit avoir pour dérivée zéro. Or, si $\Phi(z)$ a pour dérivée zéro, c'est que, en posant

$$\Phi = P + iQ,$$

on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0;$$

donc P et Q sont constants et, par suite, Φ l'est aussi.

Comme pour les variables réelles, nous désignerons par $\int f(z)\,dz$ une fonction primitive de $f(z)$, définie à une constante additive près.

223. *Dérivation par rapport à des paramètres.* — Considérons une fonction de plusieurs variables complexes $f(z, z', z'', \ldots)$ supposée holomorphe par rapport à ces variables lorsque $z, z', z'', \ldots$ sont dans certains domaines D, D′, D″, ... de leurs plans respectifs.

Prenons l'intégrale de $f(z)$ par rapport à z le long d'un chemin L contenu dans le domaine D (L pouvant être un chemin fermé), soit

$$I = P_1 + iQ_1 = \int_L f(z, z', z'', \ldots)\,dz.$$

Les variables $z', z'', \ldots$ jouent le rôle de paramètres. Je dis que ***cette intégrale est fonction holomorphe de z', z'', ... et que ses dérivées s'obtiennent par la règle valable pour le cas des variables réelles.*** Posons

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy', \qquad \ldots, \qquad f = P + iQ;$$

on a

$$P_1 = \int_L P\,dx - Q\,dy, \qquad Q_1 = \int_L Q\,dx + P\,dy.$$

Dans P et Q figurent les paramètres réels $x', y', x'', y'', \ldots$. D'après la théorie des intégrales curvilignes (t. I, p. 216), P_1 et Q_1 sont fonctions continues de ces mêmes paramètres et ont des dérivées qui s'obtiennent en dérivant sous le signe $\int$.

On a, par exemple,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial x'} = \displaystyle\int_L \frac{\partial P}{\partial x'}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial x'}\,dy, & \dfrac{\partial Q_1}{\partial x'} = \displaystyle\int_L \frac{\partial Q}{\partial x'}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x'}\,dy, \\[2ex] \dfrac{\partial P_1}{\partial y'} = \displaystyle\int_L \frac{\partial P}{\partial y'}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial y'}\,dy, & \dfrac{\partial Q_1}{\partial y'} = \displaystyle\int_L \frac{\partial Q}{\partial y'}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y'}\,dy. \end{cases}$$

On reconnaît que ces quatre dérivées partielles sont fonctions continues des variables qui y entrent. De plus, les relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y'} = -\frac{\partial Q}{\partial x'}$$

entraînent, d'après (1),

$$\frac{\partial P_1}{\partial x'} = \frac{\partial Q_1}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial y'} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x'}.$$

Donc P_1 et Q_1 satisfont, par rapport aux différents couples de variables (x', y'), (x'', y''), ..., aux relations d'holomorphie. Par conséquent, le nombre I est une fonction F des variables z', z'', ... holomorphe par rapport à toutes ces variables. Calculons ses dérivées; on a

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial P_1}{\partial x'} + i\frac{\partial Q_1}{\partial x'} = \int_L \left(\frac{\partial P}{\partial x'} + i\frac{\partial Q}{\partial x'}\right)(dx + i\,dy) = \int_L \frac{\partial f}{\partial z'}\,dz.$$

Ainsi, *la dérivée de l'intégrale par rapport à z' s'obtient en remplaçant, sous le signe $\int$, la fonction f par $\frac{\partial f}{\partial z'}$.*

224. *Théorème de Cauchy.* — Soit A un domaine du plan des z dont la frontière est constituée par un contour simple C (*cf.* t. I, n° 197, p. 219); soit $f(z)$ une fonction holomorphe en tous les points de A, contour compris. Je dis qu'on a

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

En effet, on a, si $f = P + iQ$,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P\,dx - Q\,dy + i\int_C Q\,dx + P\,dy.$$

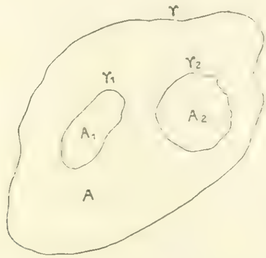
La formule de Green est applicable à chacune des intégrales curvilignes du second membre, et donne (t. I, n° 199, p. 223)

$$\int_C f(z)\,dz = -\int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + i\int\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

En vertu des relations d'holomorphie, les éléments différentiels des intégrales doubles sont nuls, ce qui établit la relation (1).

225. *Cas d'un domaine limité par plusieurs contours simples* (*cf.* t. I, p. 223). — Soit A un domaine limité par un contour simple γ; on retranche de A un ou plusieurs domaines A_1, A_2, ... contenus dans A, extérieurs l'un à l'autre, et limités respectivement par les contours simples γ_1, γ_2, ... (*fig.* 19); soit B la région res-

Fig. 19.



tante. Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe dans B et sur les contours γ, γ_1, γ_2, ...

Par application de la formule de Green (t. I, p. 224), on peut écrire

$$-\int\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma P\,dx - Q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx - Q\,dy + \ldots,$$

$$\int\int_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma Q\,dx + P\,dy + \int_{\gamma_1} Q\,dx + P\,dy + \ldots,$$

les intégrales curvilignes étant prises dans le *sens positif par rapport à* B sur γ, γ_1, γ_2, ...

Les premiers membres sont nuls en vertu des relations d'holomorphie. Changeons le sens de parcours sur γ_1, γ_2, ... de façon que ces contours soient parcourus dans le sens positif par rapport à A_1, A_2, ...; nous avons les formules

$$\int_\gamma P\,dx - Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx - Q\,dy + \ldots,$$

$$\int_\gamma Q\,dx + P\,dy = \int_{\gamma_1} Q\,dx + P\,dy + \ldots.$$

Par combinaison de ces formules, on obtient la formule fondamentale suivante :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots.$$

les intégrales étant prises dans le sens positif sur tous les contours γ, γ_1, γ_2, ... C'est le théorème de Cauchy pour les contours complexes [1].

226. *Formule fondamentale de Cauchy.* — La fonction $\frac{1}{z-a}$ est holomorphe par rapport à z dans tout domaine qui ne contient pas le point a. Prenons un cercle C de centre a et de rayon r et évaluons l'intégrale $\int_C \frac{dz}{z-a}$.

En tout point M du cercle, on peut poser

$$z - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

φ variant, par exemple, de 0 à 2π lorsque M décrit le cercle dans le sens positif. On déduit de là

$$dz = r(-\sin\varphi - i\cos\varphi)\,d\varphi$$

ou

$$dz = ir(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,d\varphi,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2i\pi.$$

Cela étant, soient $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe z dans un domaine D, a un point intérieur à D.

Soit A un domaine compris dans D, contenant intérieurement a, et limité par un contour simple C (*fig.* 20). Prenons un cercle γ de centre a, de rayon r, contenu dans A.

Remarquons que la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est fonction holomorphe de z dans tout domaine contenu dans D et ne contenant pas a, en particulier dans la région comprise entre les contours C et γ. Il en résulte, d'après le théorème de Cauchy (n° 225), qu'on a

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

---

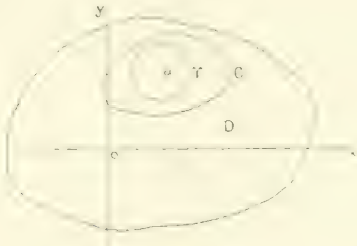
[1] Dans la suite, à moins d'indication contraire, une intégrale telle que

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

où γ est un contour simple, représente l'intégrale prise dans le sens positif de parcours par rapport au domaine intérieur à γ.

Il en résulte aussi que l'intégrale du second membre reste invariable si l'on remplace γ par un cercle concentrique intérieur γ' : autrement dit, la valeur de l'intégrale est indépendante du rayon r.

Fig. 10.



D'autre part, comme f est fonction continue, étant donné un nombre ε positif, on peut trouver un nombre positif α tel que sous la condition $r < \alpha$ on ait, en tout point du cercle γ de centre a et de rayon r,

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Écrivons alors

$$\mathrm{I} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

La première intégrale du second membre est égale, d'après (1), à $2i\pi f(a)$. Comme I est indépendant de r, la seconde doit aussi être indépendante de r. Comme on a, sur γ,

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon, \qquad |z-a| = r,$$

on voit, en appliquant la règle qui donne une limite supérieure du module d'une intégrale (n° 221, p. 15), que l'on a

$$\left| \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{r}\,2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Cette seconde intégrale est donc en module plus petite que $2\pi\varepsilon$; par suite, elle peut être rendue aussi petite que l'on veut. Comme elle a une valeur bien déterminée, indépendante de r, il en résulte qu'elle est nulle.

Nous avons finalement la *formule fondamentale de Cauchy*

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2i\pi f(a),$$

ou encore

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{2}$$

Elle est valable dans les conditions suivantes : a est intérieur à un domaine d'holomorphie D, l'intégrale est prise dans le sens positif sur un contour simple C entourant a et contenu dans D.

227. Considérons la formule (2) obtenue. Si l'on suppose que a varie, *en restant intérieur à* C, on a dans le second membre, sous le signe $\int$, une fonction holomorphe de la variable complexe a, qui joue le rôle de paramètre dans l'intégrale. Donc le second membre est holomorphe par rapport à a; par la règle de dérivation sous le signe $\int$, on obtient

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Dans cette nouvelle formule, l'expression à intégrer est fonction holomorphe de a. Donc le second membre et par suite le premier ont une dérivée par rapport à a, que nous obtenons en dérivant sous le signe $\int$; cela donne

$$f''(a) = \frac{2}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}.$$

Je dis, d'une manière générale, que $f(a)$ *a des dérivées de tous les ordres, la dérivée d'ordre n étant*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}. \tag{3}$$

En effet, cette formule étant admise pour une valeur de n, on peut la dériver par rapport à a; on obtient ainsi la même formule, n étant remplacé par $n+1$.

228. Soit maintenant une fonction f holomorphe par rapport à plusieurs variables complexes $x, y, z, \ldots$, quand ces variables sont respectivement dans des domaines A, B, C, ... de leurs plans. Si toutes les variables, moins une, reçoivent des valeurs fixes, f se réduit à une fonction d'une seule variable. D'après ce qui précède, cette fonction a, par rapport à cette variable, des dérivées de tous les ordres dont on connaît l'expression par une intégrale.

Cela posé, soit a, b, c un système de valeurs de x, y, z intérieures aux domaines A, B, C. Soit γ un cercle contenu dans A et auquel le point a est intérieur. Laissons fixes les points b, c et le cercle γ, et faisons varier a à l'intérieur de ce cercle.

On a, par application de la formule (3),

$$\frac{\partial^n f(a, b, c)}{\partial a^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(x, b, c)\,dx}{(x-a)^{n+1}}.$$

Dans l'intégrale, b et c sont des paramètres; la fonction à intégrer, étant quotient de deux fonctions holomorphes par rapport aux variables x, a, b, c, est elle-même fonction holomorphe par rapport à ces variables. Il en résulte qu'on peut appliquer la règle de dérivation par rapport aux paramètres b et c.

En particulier, en prenant d'abord le cas de $n = 1$, on voit que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial a}$ est fonction holomorphe de a, b, c, et cela dans tout système de domaines A′, B′, C′ obtenu en prenant A′ composé de points intérieurs à A, B′ de points intérieurs à B, C′ de points intérieurs à C. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$.

En résumé, chacune des dérivées du premier ordre de f est fonction holomorphe des variables a, b, c, elle a une dérivée par rapport à chacune de ces variables, ces dérivées sont elles-mêmes fonctions holomorphes de a, b, c, et ainsi indéfiniment, de sorte que si l'on considère les lettres a, b, c, qu'on effectue sur f des dérivations par rapport à a, b, c en nombre quelconque et dans un ordre quelconque, l'expression obtenue a un sens

Enfin, de même que pour les fonctions de variables réelles, *l'ordre des dérivations est indifférent*. Il suffit de le vérifier d'abord pour une fonction holomorphe de deux variables z, z' et pour les deux dérivées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial z'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z'\,\partial z}.$$

Posons

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy', \qquad f = P + iQ.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial z'} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial x'} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial x'}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z'\,\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial x'\,\partial x} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x'\,\partial x}.$$

On voit que $\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z'\, \partial z}$ sont identiques à cause de l'identité de $\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial x'}$ avec $\frac{\partial^2 P}{\partial x'\, \partial x}$ et de $\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial x'}$ avec $\frac{\partial^2 Q}{\partial x'\, \partial x}$.

Comme pour les fonctions de variables réelles, on en conclut que d'une façon générale l'ordre des dérivations est indifférent.

La conclusion est la suivante : *Toute fonction $f(x, y, z)$, holomorphe par rapport aux variables complexes x, y, z, a des dérivées de tous les ordres par rapport à ces variables, l'ordre des dérivations étant indifférent, et cela pour tout système de points a, b, c intérieurs aux domaines d'holomorphie.*

229. *Fonctions harmoniques.* — Considérons une fonction d'une variable complexe

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y).$$

Écrivons les relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nous savons que les fonctions P et Q ont des dérivées de tous les ordres, en particulier des dérivées secondes. Dérivons la première relation par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons. Il vient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Dérivons de même la première par rapport à y, la seconde par rapport à x et ajoutons-les après avoir multiplié la seconde par -1. Il vient

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

P et Q sont donc solutions d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on appelle *équation de Laplace*. D'une façon générale, on appelle *fonction harmonique* toute fonction qui satisfait à cette équation.

IV. — Séries de nombres complexes.

230. Soit une série dont le terme général est le nombre complexe $a_n + ib_n$. Nous dirons que cette série est convergente si la somme des n premiers termes a une limite déterminée et finie quand n aug-

mente indéfiniment. La condition nécessaire et suffisante pour que cela soit est que les séries de termes généraux a_n et b_n soient convergentes.

Étant donnée une série de termes complexes, si la série des modules est convergente, la série donnée l'est aussi. En effet, soit $u_n = a_n + ib_n$ le terme général de la série donnée. On a

$$|a_n| \leq |u_n|, \qquad |b_n| \leq |u_n|.$$

Donc, si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, il en est de même des séries de termes généraux a_n et b_n.

Une série de termes complexes dont la série des modules est convergente est dite *absolument convergente*. Pour une telle série, comme la somme S_n des n premiers termes a un module inférieur ou égal à la somme des modules des n premiers termes, la somme de la série, qui est la limite de S_n, a un module inférieur ou égal à la somme de la série des modules.

Dans une série absolument convergente, on peut déplacer les termes d'une manière quelconque, la nouvelle série ainsi obtenue est équivalente à la première. Ce déplacement revient en effet à opérer simultanément le déplacement des termes correspondants dans les deux séries de termes généraux a_n et b_n. La somme de ces deux séries n'étant pas changée, il en est de même de la série de terme général $a_n + ib_n$.

Il en résulte que l'on peut aussi dans une telle série grouper les termes d'une manière quelconque, l'expression ayant le même sens que pour les séries de termes réels absolument convergentes.

231. *Séries doubles.* — Soit $u_{n,p}$ une quantité réelle ou complexe dépendant de deux indices qui peuvent prendre toutes les valeurs entières positives (certains systèmes de valeurs pouvant d'ailleurs être exclus). Disposons ces quantités en un Tableau T :

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} u_{1,1}, & u_{1,2}, & \ldots, & u_{1,n}, & \ldots, \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & \ldots, & u_{2,n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ u_{p,1}, & u_{p,2}, & \ldots, & u_{p,n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right.$$

On peut toujours ranger ces quantités en une suite infinie unique; on procédera par exemple de la façon suivante. On écrit d'abord le terme $u_{1,1}$, pour lequel la somme des indices est égale à 2, puis les

termes $u_{2,1}$, $u_{1,2}$, pour lesquels la somme des indices est égale à 3, puis les termes $u_{3,1}$, $u_{2,2}$, $u_{1,3}$, pour lesquels la somme des indices est égale à 4, et ainsi de suite. On obtient bien de cette manière tous les termes du Tableau une fois et une fois seulement.

S'il arrive que toutes les séries A obtenues en disposant les termes de T en une suite unique sont convergentes et ont même somme S, nous dirons que T constitue une *série double convergente* de somme S.

Considérons d'abord le cas où les u sont des nombres réels positifs. Formons les sommes obtenues en prenant dans T d'une manière quelconque un nombre fini de termes. Elles ont une borne supérieure S finie ou infinie. Toute série A obtenue en disposant les termes du Tableau T en une suite infinie unique est telle que la borne supérieure des sommes d'un nombre fini de termes de A est égale à S.

Si S est *fini*, A est convergente et a pour somme S, et, d'après la définition, T est une série double convergente de somme S.

D'autre part, considérons les lignes horizontales du Tableau T; soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \ldots$ les sommes des séries constituées par ces lignes, chacun des nombres σ étant fini si la série correspondante est convergente, égal à $+\infty$ si cette série est divergente. Soit S' la borne supérieure des nombres $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p$ pour toutes les valeurs de p. Je dis que l'on a

$$S = S'.$$

D'abord, quel que soit p, on a

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p \leqq S,$$

car les termes qui entrent dans les p premières lignes du Tableau T figurent dans la série A. Il en résulte que l'on a $S' \leqq S$.

Donnons-nous maintenant un nombre positif B inférieur à S. Nous pouvons, dans la série A, prendre au commencement un nombre q de termes, suffisant pour que la somme de ces termes surpasse B. Si p est assez grand, ces q termes figurent dans la somme $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p$, et l'on a $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p \geqq B$, d'où $S' \geqq B$. Comme cela a lieu quel que soit $B < S$, cela veut dire que l'on a

$$S' \geqq S,$$

d'où finalement

$$S' = S.$$

On voit donc que, quand S a une valeur finie, les lignes du Tableau forment des séries convergentes et les sommes de ces séries

forment elles-mêmes une série convergente qui a pour somme S. On peut aussi, au lieu de faire la somme des termes du Tableau T par lignes, la faire par colonnes. On obtient encore des séries convergentes dont les sommes forment elles-mêmes une série convergente de somme S.

Si S est égal à $+\infty$, on dit que les quantités $u_{n,p}$ forment une série double divergente.

Étant données deux séries doubles de termes généraux *positifs* $u_{n,p}$, $v_{n,p}$, si l'on a $v_{n,p} \leq u_{n,p}$, et si la série u est convergente, il en est de même de la série v. On le reconnaît en considérant la série ordinaire A équivalente au Tableau.

Supposons maintenant les u réels et de signes quelconques. Posons

$$u_{n,p} = (u_{n,p} + |u_{n,p}|) - |u_{n,p}|;$$

$u_{n,p}$ apparaît ainsi comme la différence de deux quantités dont chacune est positive ou nulle et égale au plus en module à $2|u_{n,p}|$. Si la série double formée par les quantités $|u_{n,p}|$ est convergente, on peut former deux séries doubles T_1 et T_2 dont les termes généraux respectifs sont les deux termes de la différence précédente et qui sont toutes deux convergentes. A toute somme d'un nombre fini ou infini de termes de T correspond dans T_1 et T_2 une somme, et la première somme est la différence des deux dernières. On en déduit qu'une série A obtenue en disposant les termes de T en une suite unique est convergente et a une somme toujours la même si l'on déplace les termes de A; c'est aussi la somme obtenue en effectuant d'abord dans le Tableau T la sommation par lignes par exemple, puis en effectuant la somme de la série des nombres obtenus.

Enfin, si les quantités u sont des nombres complexes de la forme

$$u_{n,p} = a_{n,p} + ib_{n,p},$$

et si la série double de terme général $|u_{n,p}|$ est convergente, chacune des séries de terme général $a_{n,p}$, $b_{n,p}$ est convergente. Soient P, Q leurs sommes. Toute série A obtenue en écrivant les termes du Tableau en une suite unique a pour somme $P + iQ$. On dira que la série $u_{n,p}$ est *absolument convergente* et a pour somme $P + iQ$.

232. *Multiplication des séries.* — Soient deux séries à termes réels ou complexes de termes généraux u_n, v_n.

Si ces deux séries sont convergentes et ont respectivement pour sommes S et Σ, on peut former une série convergente de somme SΣ.

en prenant la série ayant pour terme général

$$S_{n+1}\Sigma_{n+1} - S_n\Sigma_n,$$

c'est-à-dire

$$(u_1 + \ldots + u_{n+1})(v_1 + \ldots + v_{n+1}) - (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n).$$

Supposons maintenant que les deux séries données soient absolument convergentes. Considérons tous les produits tels que $u_n v_p$, obtenus en multipliant un terme de la première par un terme de la seconde. Disposons ces quantités $u_n v_p$ en un Tableau (T) à double entrée :

$$(\mathrm{T}) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} u_1 v_1, & u_1 v_2, & \ldots, & u_1 v_p, & \ldots, \\ u_2 v_1, & u_2 v_2, & \ldots, & u_2 v_p, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots, \\ u_n v_1, & u_n v_2, & \ldots, & u_n v_p, & \ldots. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array} \right.$$

Je dis que ce Tableau constitue une série double absolument convergente.

Considérons en effet la série double T' des modules correspondante, c'est-à-dire le Tableau de terme général $|u_n|\,|v_p|$. Prenons une somme d'un nombre fini quelconque de termes du Tableau T', et soit q un nombre plus grand que les indices de lignes et de colonnes de ces termes. Ceux-ci sont compris dans le carré formé par les q premières lignes et les q premières colonnes. Or, la somme des termes de ce carré est

$$(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_q|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_q|).$$

Comme ce produit est inférieur à $S'\Sigma'$, S' étant la somme de la série $|u_n|$, Σ' la somme de la série $|v_n|$, il en résulte que, dans le Tableau T' des modules, la somme d'un nombre fini de termes reste inférieure à un nombre déterminé. Donc la série double T' est convergente, et la série T, de terme général $u_n v_p$, est absolument convergente.

Cela posé, on peut faire la somme du Tableau T, soit par lignes, soit par colonnes, soit en disposant les termes d'une manière quelconque en une suite unique infinie. En particulier, on les dispose souvent de la façon suivante :

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \ldots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1) + \ldots.$$

V. — Séries de fonctions réelles et complexes.

233. Nous considérerons des séries dont les termes sont fonctions, soit d'une ou plusieurs variables réelles, soit d'une ou plusieurs variables complexes, ces fonctions étant définies pour les systèmes de valeurs des variables appartenant, suivant les cas, à un intervalle, à un domaine, à un domaine dans le plan des z, ou enfin à plusieurs domaines s'il s'agit de plusieurs variables complexes. Soit, dans tous les cas, E l'ensemble des systèmes de valeurs des variables.

Convergence normale. — Soit une série

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont les termes sont fonctions de certaines variables réelles ou complexes, définies pour un ensemble E.

Nous dirons que *la série est normalement convergente pour l'ensemble* E *si, α_n étant la borne supérieure de $|u_n|$ dans cet ensemble, la série numérique à termes positifs*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

est convergente.

Remarquons que l'on peut affirmer qu'il en est ainsi si l'on connaît une série numérique à termes positifs, convergente,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

telle que l'on ait en tout point de E

$$|u_n| \leq a_n.$$

Si une série satisfait à la condition de l'énoncé, elle est convergente pour tout système de valeurs de E. De plus, donnons-nous un nombre positif ε. On peut trouver un entier p tel que, pour $n > p$, on ait

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots < \varepsilon.$$

Dans ces conditions, le reste de la série donnée, arrêtée à son $n^{\text{ième}}$ terme, c'est-à-dire la quantité $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, est, *en tout point de* E, au plus égale en module à ε.

C'est à cette propriété qu'on donne le nom de *convergence uniforme.*

234. Une série convergente

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

est dite *uniformément convergente* pour un ensemble E si, quel que soit le nombre positif ε, il y a un entier p tel que, pour $n > p$, et pour tout système de valeurs de l'ensemble E, on a

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < \varepsilon,$$

ce qui s'écrit, avec les notations usuelles,

$$|S - S_n| < \varepsilon.$$

Nous allons montrer qu'*on peut ramener le cas de la convergence uniforme au cas de la convergence normale*. En effet, soit une série uniformément convergente. Donnons-nous une suite de nombres positifs décroissants et formant une série convergente

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots.$$

D'après l'hypothèse de la convergence uniforme, nous pouvons trouver un entier n_0 tel que l'on ait

$$|S_{n_0} - S| < \alpha_1,$$

puis un entier $n_1 > n_0$ tel que

$$|S_{n_1} - S| < \alpha_2,$$

et d'une manière générale un entier $n_i > n_{i-1}$ tel que

$$|S_{n_i} - S| < \alpha_{i+1}.$$

Posons

$$U_0 = S_{n_0}, \qquad U_1 = S_{n_1} - S_{n_0}, \qquad \ldots, \qquad U_i = S_{n_i} - S_{n_{i-1}}, \qquad \ldots;$$

on peut écrire, pour $i = 1, 2, \ldots,$

$$U_i = (S_{n_i} - S) - (S_{n_{i-1}} - S),$$

d'où résulte

$$|U_i| < \alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\alpha_i.$$

D'autre part, U_i est la somme d'un certain nombre de termes consécutifs de la série donnée. *On peut donc, par un certain groupement de termes consécutifs de la série donnée, obtenir une série normalement convergente*

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots, \quad U_i, \quad \ldots.$$

En effet, les termes U, à partir du second, sont respectivement plus petits en module que les termes de la série convergente

$$2\alpha_1, \quad 2\alpha_2, \quad \ldots, \quad 2\alpha_n, \quad \ldots.$$

235. *Variables réelles. — Une série dont les termes sont fonctions continues d'une ou plusieurs variables réelles $x, y, \ldots$ dans un domaine D, et qui est uniformément convergente dans ce domaine, a pour somme une fonction continue dans ce domaine.*

Considérons, en effet, une série remplissant ces conditions :

$$u_1(x, y, \ldots) + \ldots + u_n(x, y, \ldots) + \ldots.$$

Soit $f(x, y, \ldots)$ la somme de cette série. Donnons-nous un nombre positif ε. On peut déterminer un entier n tel que l'on ait

$$|R_n| = |u_{n+1} + \ldots| < \varepsilon.$$

On a, en appelant S_n la somme des n premiers termes de la série,

$$f = S_n + R_n.$$

Or, S_n étant la somme d'un nombre fini de fonctions continues, est elle-même fonction continue. Soit $(x_0, y_0, \ldots)$ un point du domaine D; on peut trouver un nombre α tel que les conditions

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \alpha, \qquad \ldots$$

entraînent

$$|S_n(x, y, \ldots) - S_n(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon.$$

D'ailleurs, on a

$$|R_n(x, y, \ldots)| < \varepsilon, \qquad |R_n(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon.$$

Cela posé, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) = {} & S_n(x, y, \ldots) - S_n(x_0, y_0, \ldots) \\ & + R_n(x, y, \ldots) - R_n(x_0, y_0, \ldots). \end{aligned}$$

Le second membre est plus petit en module que 3ε, d'où

$$|f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < 3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue.

Une série de fonctions continues peut être convergente pour tous les points d'un certain domaine sans que la somme de cette série soit

une fonction continue dans ce domaine. Prenons, par exemple, la série

$$x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1+x)^n} + \ldots$$

Supposons que x soit positif. Nous avons une progression géométrique de raison $\frac{1}{1+x}$ dont la somme est

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{1+x}} = 1 + x.$$

Cette somme $(1+x)$ tend vers 1 quand x tend vers zéro. Mais, si l'on fait $x = 0$ dans la série proposée, on voit que tous ses termes sont nuls; donc sa somme est nulle. Si donc on donne à x des valeurs positives tendant vers zéro, la somme de la série tend vers 1 et non pas vers sa valeur pour $x = 0$.

236. *Dérivation.* — Considérons une série dont les termes sont des fonctions d'une variable réelle x ayant des dérivées, et qui est convergente pour toutes les valeurs d'un intervalle. Soit

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

cette série. Je dis que, *si la série des dérivées*

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

est normalement convergente dans l'intervalle, elle représente la dérivée de la série donnée.

D'après l'hypothèse, il y a une série numérique convergente α_1, α_2, ..., α_n, ... telle que l'on a

$$|u'_n| < \alpha_n.$$

Donnons-nous un nombre positif ε, et prenons un entier n tel que l'on ait

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots < \varepsilon.$$

Soient $f(x)$ la somme de la série donnée, $\varphi(x)$ la somme de la série des dérivées. Si l'on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la série donnée, la somme des n premiers termes de la série des dérivées est S'_n, de sorte qu'en désignant par x et $x+h$ deux

valeurs de l'intervalle, nous pouvons écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x) &= \frac{S_q(x+h)-S_q(x)}{h}-S'_q(x) \\ &+ \sum_{n=q+1}^{\infty}\left[\frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h}-u'_n(x)\right]. \end{aligned}\right.$$

D'après la formule des accroissements finis, on a

$$\frac{u_i(x+h)-u_i(x)}{h}=u'_i(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1).$$

Donc le terme relatif à l'indice i sous le signe Σ est plus petit en module que $2\alpha_i$. La somme des termes sous le signe Σ est inférieure en module à

$$2\alpha_{q+1}+2\alpha_{q+2}+\ldots$$

et, par suite, inférieure à 2ε.

Cela posé, si nous faisons tendre h vers zéro, la première différence du second membre de (1) tend vers zéro. Donc, quand $|h|$ est inférieur à un certain nombre, le second membre, et par suite le premier, est plus petit en module que 3ε. Comme ε est arbitraire, cela veut dire que, quand h tend vers zéro, le premier membre tend vers zéro. Donc $f(x)$ est continue et a pour dérivée $\varphi(x)$.

Ce résultat s'étend au cas où l'on suppose seulement que la série (u') des dérivées est uniformément convergente. En effet, opérons dans cette série un groupement de termes consécutifs de façon à obtenir une série (U') normalement convergente. En groupant de la même manière les termes de la série donnée, on obtient une série (U) telle que chaque terme de la série (U') est la dérivée du terme correspondant de la série (U). En appliquant aux nouvelles séries le théorème précédent, on voit que φ, somme de la série des dérivées, est la dérivée de f.

237. *Intégration.* — Soit une série

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots$$

uniformément convergente dans un intervalle (a, b) et dont les termes sont fonctions continues d'une variable x dans cet intervalle. Je dis qu'on peut l'intégrer terme à terme.

En effet, donnons-nous un nombre positif ε. On peut déterminer un entier p tel qu'en posant $f(x)=u_1+u_2+\ldots+u_p+R_p$, on ait,

pour $n > p$,

$$|R_n| < \varepsilon.$$

On a, en intégrant de a à b les deux membres de l'équation précédente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

La dernière intégrale du second membre est plus petite en module que $\varepsilon(b-a)$. Si donc on fait croître n indéfiniment, elle tend vers zéro.

Donc la série de terme général $\int_a^b u_n\,dx$ est convergente et a pour somme l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

On démontrerait de même qu'on peut prendre terme à terme l'intégrale double ou l'intégrale triple d'une série uniformément convergente de fonctions de deux ou trois variables réelles dans un domaine donné.

238. *Séries de fonctions de variables complexes. — Considérons une série*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont les termes sont fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes z, z', z'', ... quand ces variables sont respectivement à l'intérieur de domaines A, A', A'', ... de leurs plans. Supposons, en outre, que cette série soit normalement convergente. Je dis que *sa somme Σu_n représente une fonction holomorphe des variables complexes z, z', z'', ... pour tout système de valeurs de ces variables intérieures respectivement aux domaines A, A', A'', ... et qu'on obtient les dérivées de cette fonction en dérivant terme à terme la série donnée.*

Donnons-nous un nombre positif r et considérons la région A du plan des z. Désignons par A_1 l'ensemble des points de cette région dont la distance à un point quelconque de la frontière C de la région A est plus grande que r, de telle sorte qu'un cercle γ de rayon r, ayant pour centre un tel point, est tout entier intérieur à A. Remarquons que si l'on choisit à l'avance un point intérieur à A, en prenant le nombre r suffisamment petit, on obtiendra une région A_1 contenant ce point.

Soient de même A'_1, A''_1, ... les ensembles de points des régions A', A'', ... jouissant de la même propriété relativement à ces régions.

Considérons un système de valeurs a, a', a'', ... attribuées à z, z', z'', ..., appartenant respectivement à A_1, A'_1, A''_1, ... Le cercle γ de centre a et de rayon r étant tout entier dans la région A, nous avons (n° 227, p. 22)

$$\frac{\partial u_n}{\partial a}(a, a', a'', \ldots) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{u_n(z, a', a'', \ldots)}{(z-a)^2}\,dz.$$

D'après l'hypothèse, α_n désignant la borne supérieure de $|u_n|$, la série de terme général α_n est convergente. D'autre part, sur le cercle γ, on a $|z - a| = r$, d'où

$$\left|\frac{u_n(z, a', a'', \ldots)}{(z-a)^2}\right| < \frac{\alpha_n}{r^2},$$

et, par suite, la longueur de γ étant $2\pi r$,

$$\left|\int_\gamma \frac{u_n(z, a', a'', \ldots)\,dz}{(z-a)^2}\right| < \frac{\alpha_n}{r^2}\,2\pi r = 2\pi\frac{\alpha_n}{r}.$$

On a donc

$$\left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a}\right| < \frac{\alpha_n}{r}.$$

On a de même

$$\left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a'}\right| < \frac{\alpha_n}{r}, \qquad \left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a''}\right| < \frac{\alpha_n}{r}, \qquad \ldots.$$

Séparons les parties réelles et les coefficients de i en posant

$$a = x + iy, \qquad a' = x' + iy', \qquad \ldots, \qquad u_n = P_n + iQ_n.$$

On a alors

$$\frac{\partial u_n}{\partial a} = \frac{\partial P_n}{\partial x} + i\frac{\partial Q_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y} - i\frac{\partial P_n}{\partial y}.$$

Par conséquent, les dérivées par rapport à x, y, x', y', ... des fonctions P_n et Q_n sont au plus égales en module à $\frac{\alpha_n}{r}$.

D'autre part, comme $|P_n| < \alpha_n$, $|Q_n| < \alpha_n$, les séries de fonctions de variables réelles ΣP_n, ΣQ_n sont normalement convergentes, donc représentent des fonctions continues; posons

$$P = \Sigma P_n, \qquad Q = \Sigma Q_n.$$

Considérons les séries

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial P_n}{\partial y}, \quad \dots;$$

ces dernières séries, ayant leurs termes au plus égaux en module à ceux de la série convergente $\sum \frac{\alpha_n}{r}$, sont normalement convergentes. Elles représentent donc des fonctions continues qui sont les dérivées des séries ΣP_n, ΣQ_n. On a, par exemple,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum \frac{\partial P_n}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \sum \frac{\partial Q_n}{\partial x}, \qquad \dots.$$

De plus, des relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x},$$

on déduit les mêmes relations pour les séries correspondantes

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial x} = \sum \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \qquad \sum \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\sum \frac{\partial Q_n}{\partial x}.$$

Donc P et Q, en tant que fonctions de x, y, satisfont aux conditions d'holomorphie, et la dérivée de $P + iQ = \Sigma u_n$ par rapport à a est

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \sum \frac{\partial P_n}{\partial x} + i\sum \frac{\partial Q_n}{\partial x} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial a}.$$

En résumé, Σu_n *est une fonction holomorphe des variables complexes* a, a', a'', ..., *et sa dérivée par rapport à chacune des variables s'obtient en dérivant terme à terme la série donnée, le résultat étant établi pour tout système de valeurs* a, a', a'', ... *tel que* a *soit intérieur à la région* A, a' *intérieur à la région* A', a'' *intérieur à la région* A'', *etc.*

La série $\sum \frac{\partial u_n}{\partial a}$, en vertu de ce que l'on a $\left|\frac{\partial u_n}{\partial a}\right| < \frac{\alpha_n}{r}$, est normalement convergente dans le système de régions A_1, A'_1, A''_1, ...

Je dis qu'*en tout point intérieur à* A, A', A'', ..., *la dérivation terme à terme de la série donnée peut s'effectuer indéfiniment.* Admettons-le pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n; admettons aussi que les séries des dérivées d'ordre n sont normalement convergentes dans un système de régions A_1, A'_1, A''_1, ... Dans ces conditions, chaque série des dérivées d'ordre n peut être traitée comme la série Σu_n. Donc toute dérivée d'ordre $(n+1)$ s'obtiendra en déri-

vant terme à terme une des séries dérivées d'ordre n, le résultat étant valable pour tout système de valeurs $a, a', a'', \ldots$ intérieures à A_1, A'_1, A''_1, ... De plus, les séries obtenues sont normalement convergentes dans un système A_2, A'_2, A''_2, ... situé par rapport à A_1, A'_1, A''_1, ... comme ce dernier est situé par rapport à A, A', A'', ... Le procédé de récurrence s'applique donc.

Enfin, si l'on choisit à l'avance un point intérieur à A, A', A'', ..., on peut faire en sorte que ce point soit intérieur à A_2, A'_2, A''_2, ...; cela achève d'établir la proposition.

Une série uniformément convergente de fonctions holomorphes de z, z', ... représente une fonction holomorphe, puisqu'elle peut, par groupement de termes, se transformer en une série normalement convergente.

239. *Intégration.* — Soit une série

$$f(z) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont fonctions holomorphes d'une variable complexe z dans un domaine A et qui est uniformément convergente dans ce domaine. $f(z)$ est, d'après ce qui précède, fonction holomorphe. Prenons à l'intérieur de A un chemin L allant d'un point z_0 à un point z. Considérons les intégrales le long de L des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et f. Étant donné un nombre positif ε, il y a un entier p tel que l'on a, pour $n > p$, en désignant par R_n le reste de la série arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme,

$$|R_n| < \varepsilon,$$

et cela en tout point du domaine A. Nous pouvons écrire dans ces conditions, comme R_n est holomorphe,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} u_1\,dz + \ldots + \int_{z_0}^{z} u_n\,dz + \int_{z_0}^{z} R_n\,dz.$$

On a d'ailleurs

$$\left|\int_{z_0}^{z} R_n\,dz\right| < \varepsilon \text{ longueur de l'arc } L,$$

de sorte que, si n croît indéfiniment, cette intégrale tend vers zéro: la différence entre le premier membre de l'équation précédente et la somme des n premiers termes du second tend vers zéro. Par consé-

quent, la série dont le terme général est $\int_{z_0}^{z} u_n\,dz$ est convergente et a pour somme l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Cela revient à dire qu'on peut intégrer terme à terme la série donnée. Nous constatons, en outre, que la série des intégrales est elle-même uniformément convergente, et que, si la série donnée est normalement convergente, il en est de même de la série des intégrales.

VI. — Séries entières à une variable.

240. On appelle *série entière* par rapport à z une série de la forme

$$(1)\qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

les constantes a et la variable z étant des nombres complexes. Posons $a'_n = |a_n|$. Considérons la série auxiliaire à termes positifs

$$(2)\qquad a'_0 + a'_1 \rho + a'_2 \rho^2 + \ldots + a'_n \rho^n + \ldots,$$

où ρ recevra des valeurs positives ou nulles.

Si la série (2) converge pour une valeur attribuée à ρ, elle converge pour toute valeur inférieure à celle-là. *Soit* R_0 *la borne supérieure des nombres* ρ *tels que la série* (2) *soit convergente;* R_0 peut être nul, égal à un nombre fini positif, ou à $+\infty$; la série (2) est convergente si $\rho < R_0$, divergente si $\rho > R_0$; désignons par C_0 le cercle de centre O et de rayon R_0 (dans le cas de R_0 fini).

Je dis que *la série* (1) *diverge en tout point* z *extérieur à* C_0. Supposons en effet pour un instant que la série (1) soit convergente pour une valeur z de module $R_1 > R_0$, alors le module du terme général de (1), soit $a'_n R_1^n$, tend vers o quand n croît indéfiniment; donc les nombres $a'_n R_1^n$ sont, quel que soit n, inférieurs à un nombre fini A.

Prenons R_2 tel que $R_0 < R_2 < R_1$; on a

$$a'_n R_2^n = a'_n R_1^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \leqq A \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n.$$

Donc la série de terme général $a'_n R_2^n$ a ses termes au plus égaux à ceux de la série de terme général $A\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n$, qui est une progression

géométrique décroissante; donc la série (2) converge pour le nombre R_2 supérieur à R_0, contrairement à la définition de R_0; la proposition est démontrée.

Soit maintenant (dans le cas de $R_0 > 0$) C un cercle de centre O et de rayon $R < R_0$; la série de terme général $a'_n R^n$ est convergente; quand le point z est dans C, on a $|z| \leq R$, d'où $|a_n z^n| \leq a'_n R^n$, la série (1) est donc normalement convergente dans C; d'ailleurs, chaque terme de (1) est fonction holomorphe de z, donc (n° 238) la série (1) représente une fonction $f(z)$ holomorphe en tout point intérieur à C, les dérivées s'obtenant en dérivant terme à terme la série (1). Comme on peut prendre R aussi voisin qu'on veut de R_0, le résultat est valable pour tout point intérieur à C_0, et l'on a l'énoncé suivant :

La série (1), *dans tout l'intérieur de* C_0, *est convergente et représente une fonction* $f(z)$ *holomorphe de* z *dont les dérivées s'obtiennent en dérivant* (1) *terme à terme. Elle diverge en tout point extérieur à* C_0.

Le cercle C_0 est dit *cercle de convergence* de la série entière (1). R_0 est le *rayon de convergence*. Pour les points du cercle de convergence, il y a doute en ce qui concerne la convergence de la série.

Quand $R_0 = +\infty$, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan.

Quand $R_0 = 0$, la série (1) n'est convergente que pour $z = 0$.

On peut intégrer la série (1) *terme à terme dans* C_0. Soit en effet z un point intérieur à C_0; intégrons le terme général $a_n z^n$ le long du rayon Oz; on a

$$\int_{Oz} a_n z^n \, dz = \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}.$$

La série (1) est normalement convergente dans tout cercle intérieur à C_0; on peut l'intégrer terme à terme le long de Oz (n° 239); cela montre que la série

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

est convergente en tout point intérieur à C_0, et représente une fonction primitive de $f(z)$.

241. Il résulte de ce qui précède que, si la série (1) admet pour

rayon de convergence R_0, la série dérivée, savoir

$$a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots$$

a aussi pour rayon de convergence R_0. En effet, son rayon de convergence est au moins égal à R_0 ; mais il ne peut lui être supérieur, car, en revenant à la première série par intégration de la seconde, on trouverait pour cette première série un rayon de convergence supérieur à R_0.

D'une manière générale, *une série entière et toutes ses séries dérivées ou intégrales ont même rayon de convergence.*

Étant donnée la série entière (1), je dis que *son rayon de convergence est égal à la plus petite limite de la suite*

$$(3) \qquad \frac{1}{a'_1}, \quad \frac{1}{\sqrt[2]{a'_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}}, \quad \ldots,$$

en convenant de remplacer dans cette suite par $+\infty$ un terme correspondant à un coefficient nul.

Soit en effet R la plus petite limite de cette suite. Supposons d'abord R fini et positif. Étant donné un nombre $\rho < R$, prenons λ tel que $\rho < \lambda < R$.

D'après une propriété de la plus petite limite, à partir d'un certain rang dans la suite (3), on a

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}} > \lambda \quad \text{ou} \quad a'_n < \frac{1}{\lambda^n},$$

par suite

$$a'_n \rho^n < \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^n.$$

$\frac{\rho}{\lambda}$ est plus petit que 1, donc les termes de (2) sont plus petits que les termes d'une progression géométrique décroissante. Par suite, la série (2) est convergente pour $\rho < R$.

Si, au contraire, nous nous donnons un nombre $\rho > R$, on peut, quel que soit l'entier p, trouver $n > p$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}} < \rho \quad \text{ou} \quad a'_n \rho^n > 1.$$

Il y a donc, dans la suite (2), et cela indéfiniment, des termes plus grands que 1. Donc la série (2) est divergente pour $\rho > R$.

Par conséquent, la plus petite limite R de la suite (2) est égale au rayon de convergence de la série (1).

Si R est nul, on applique seulement la seconde partie du raisonnement. S'il est égal à $+\infty$, on applique la première partie.

242. Nous avons vu qu'une série entière peut en un point du cercle de convergence être convergente ou non. Je dis que, *si la série est convergente pour un point z_0 du cercle, et si un point z se déplace sur le rayon Oz_0 en restant à l'intérieur du cercle et en tendant vers z_0, on a*

$$\lim f(z) = f(z_0),$$

c'est-à-dire qu'*il y a continuité le long du rayon*. Pour établir cette propriété, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme d'Abel. — *Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots$ des quantités réelles ou complexes, en nombre fini ou infini, telles que toutes les sommes*

$$S_p = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$$

sont inférieures en module à un nombre A. Soient d'autre part des nombres positifs décroissants $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$. Je dis que l'on a

$$(4) \qquad |\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p| < \varepsilon_0 A.$$

En effet, nous avons

$$\alpha_0 = S_0, \qquad \alpha_1 = S_1 - S_0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = S_p - S_{p-1}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p &= \varepsilon_0 S_0 + \varepsilon_1(S_1 - S_0) + \ldots + \varepsilon_p(S_p - S_{p-1}) \\ &= S_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + S_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots \\ &\quad + S_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + S_p\varepsilon_p.\end{aligned}$$

Par hypothèse, toutes les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ sont positives ; elles sont multipliées par des nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}, S_p$ inférieurs en module à A ; on a donc

$$|\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p| < A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0.$$

L'inégalité (4) est donc établie.

Cela étant, revenons à la série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Formons $f(z_0)$ et $f(\lambda z_0)$, λ étant un nombre positif plus petit que 1, que nous ferons tendre vers 1. Dans ces conditions, λz_0 re-

présente bien un point variable tendant vers z_0 sur le rayon Oz_0 et restant à l'intérieur du cercle de convergence. On a

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n + \ldots, \tag{5}$$

$$f(\lambda z_0) = a_0 + a_1 \lambda z_0 + \ldots + a_n \lambda^n z_0^n + \ldots. \tag{6}$$

La première série étant convergente, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que, pour $n > p$, le reste R_n de cette série soit plus petit en module que ε. Par suite, h étant un entier positif quelconque, on a, si $n > p$,

$$|R_{n+h} - R_n| < 2\varepsilon.$$

Ceci s'écrit

$$|a_{n+1} z_0^{n+1} + a_{n+2} z_0^{n+2} + \ldots + a_{n+h} z_0^{n+h}| < 2\varepsilon.$$

Appliquons le lemme précédent en remplaçant les quantités α_0, α_1, ..., α_p par

$$a_{n+1} z_0^{n+1}, \quad a_{n+2} z_0^{n+2}, \quad \ldots, \quad a_{n+h} z_0^{n+h},$$

et les quantités ε_0, ε_1, ..., ε_p par

$$\lambda^{n+1}, \quad \lambda^{n+2}, \quad \ldots, \quad \lambda^{n+h};$$

on a, par application du lemme, la quantité désignée par A étant ici 2ε,

$$|a_{n+1} \lambda^{n+1} z_0^{n+1} + \ldots + a_{n+h} \lambda^{n+h} z_0^{n+h}| < \lambda^{n+1} \cdot 2\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Laissons n fixe et faisons croître h. Le premier membre de cette inégalité a une limite qui est le reste R_n de la seconde série (6). Cette limite est donc au plus égale à 2ε. Écrivons alors, en posant $f = S_n + R_n$,

$$f(\lambda z_0) - f(z_0) = S_n(\lambda z_0) - S_n(z_0) + R_n(\lambda z_0) - R_n(z_0).$$

On a, quel que soit $n > p$ et quel que soit λ,

$$|R_n(z_0)| < \varepsilon, \qquad |R_n(\lambda z_0)| < 2\varepsilon.$$

La différence $S_n(\lambda z_0) - S_n(z_0)$ est un polynome en λ qui tend vers 0 quand λ tend vers 1. Donc $|f(\lambda z_0) - f(z_0)|$ peut être rendu inférieur à 4ε, en prenant λ assez voisin de 1. Comme ε est arbitraire, cela montre que $f(\lambda z_0)$ tend vers $f(z_0)$ quand λ tend vers 1, ce qui établit la proposition.

243. *Séries entières réelles.* — Il y a lieu de considérer le cas où les coefficients a_0, a_1, ... et la variable z sont réels. On reconnaît

qu'une série entière de cette forme, qu'on appelle *série entière réelle*, a un intervalle de convergence déterminé $(-R_0, +R_0)$. Elle est convergente en tout point intérieur à cet intervalle, divergente en tout point extérieur; il y a doute pour les extrémités de l'intervalle.

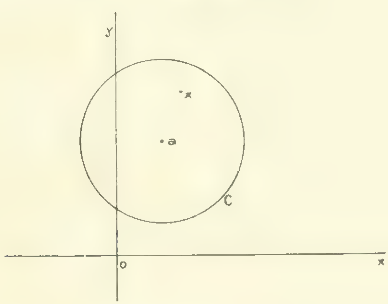
Une telle série représente dans son intervalle de convergence une fonction continue ayant des dérivées de tous les ordres qui s'obtiennent en la dérivant terme à terme.

244. L'étude des séries entières montre que ces séries représentent des fonctions holomorphes.

Nous allons maintenant démontrer que, réciproquement, toute fonction holomorphe est représentable par une série entière.

Série de Taylor. — Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe z, dont on sait qu'elle est holomorphe dans un cercle C de centre a (contour compris) (*fig.* 21); x étant un point quelconque

Fig. 21.



intérieur au cercle C, on a la formule

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Ecrivons

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{x-a}{z-a}}.$$

En tout point du cercle C, on a

$$\left|\frac{x-a}{z-a}\right| < 1,$$

de sorte que, en vertu de la théorie de la division étendue aux fonc-

tions de variables complexes. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-a}{z-a}}$ peut se remplacer par la progression géométrique décroissante

$$1+\frac{x-a}{z-a}+\ldots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{f(z)}{z-x}=\sum_{n=0,1,\ldots}\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

Considérons cette dernière relation. En tout point du cercle C, la série du second membre est normalement convergente. En effet, soient M une borne supérieure de $|f(z)|$, r le module de $x-a$, R le module de $z-a$, c'est-à-dire le rayon du cercle C.

Le terme général de cette série est en module plus petit que $\frac{r^n M}{R^{n+1}}$, qui est le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc la série peut être intégrée terme à terme sur le contour C, et l'on a

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0,1,\ldots}\int_C\frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Rappelons que nous avons trouvé (n° 227, p. 22)

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a},\qquad f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

d'où, en substituant dans l'égalité précédente,

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots.$$

C'est la *série de Taylor*.

On voit que *toute fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur et sur le contour d'un cercle de centre a est représentable à l'intérieur par une série entière en $(z-a)$.*

245. *Série de Laurent.* — Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe dans la couronne comprise entre deux cercles C et C' de centre a et de rayons R, R' (R' < R) (*fig.* 22).

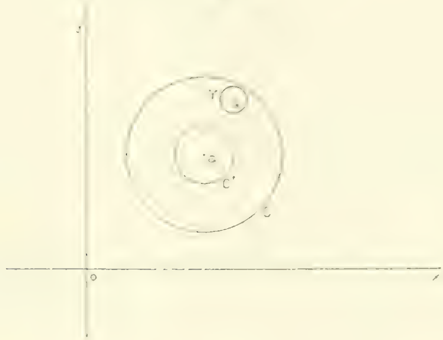
Étant donné un point x intérieur à la couronne, prenons un cercle γ de centre x intérieur lui aussi à la couronne; on sait que l'on a (n° 225)

$$(1)\qquad \int_C\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\int_{C'}\frac{f(z)\,dz}{z-x}+\int_\gamma\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

les trois cercles C, C′, γ étant parcourus dans le sens positif; or l'intégrale de $\frac{f(z)}{z-x}$ le long de γ est égale à $2i\pi f(x)$. On déduit donc de (1)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C'}\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Fig. [illegible].



Développons séparément les deux intégrales du second membre. Pour la première, remplaçons $\frac{f(z)}{z-x}$ par la même somme que précédemment, c'est-à-dire par $\sum_{n=0,1,\ldots}\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}$, cette série étant encore normalement convergente. Pour la seconde intégrale, comme on a sur le cercle C′

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| < 1,$$

nous écrirons

$$\frac{f(z)}{x-z} = \frac{f(z)}{(x-a)-(z-a)} = \frac{f(z)}{x-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}},$$

et, en développant en série convergente la quantité $\frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}}$, on obtient

$$\frac{f(z)}{x-z} = \sum_{p=0,1,\ldots}\frac{f(z)(z-a)^p}{(x-a)^{p+1}}.$$

Soit M la borne supérieure de $|f(z)|$ dans la couronne.

Le terme général de cette série est en module plus petit que $\left|\frac{MR'^p}{(x-a)^{p+1}}\right|$, qui est le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc la série est normalement convergente.

En intégrant terme à terme ces deux séries et en substituant dans l'équation qui donne $f(x)$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0,1,\ldots} \int_C \frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=0,1,\ldots} \int_{C'} \frac{(z-a)^p f(z)\,dz}{(x-a)^{p+1}}.$$

On a ainsi pour $f(x)$ un développement de la forme

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots + \frac{B_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_p}{(x-a)^p} + \ldots,$$

les coefficients A et B étant définis par les relations

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad B_p = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} (z-a)^{p-1} f(z)\,dz.$$

Pour tout point de la couronne où elle est holomorphe, $f(z)$ se présente ainsi comme la somme de deux séries, la première entière en $z-a$, la seconde entière en $\frac{1}{z-a}$. C'est la *série de Laurent*.

VII. — Fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$.

246. En appliquant la formule de Taylor (t. I, n° **121**, p. 117) à des *fonctions réelles*, on peut obtenir de ces fonctions des développements en séries entières. On a, sous certaines conditions, en appliquant la formule de Taylor au cas de $x = 0$ et mettant x au lieu de h, la formule de Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

S'il se trouve que, x étant fixé, le reste $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on en déduit que la série de terme général $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est convergente et a pour somme $f(x)$; on a un développement de $f(x)$ en série entière.

Un cas dans lequel on est assuré que le reste tend vers zéro est celui où les valeurs des dérivées de tous les ordres sont inférieures en module à un nombre A. En effet, dans ces conditions, le reste R_n est en module plus petit que $A\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Or, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers zéro, car c'est le terme général d'une série convergente (le rapport d'un terme au précédent, soit $\frac{x}{n+1}$, tend vers zéro).

Comme exemples de fonctions remplissant ces conditions, on peut citer les trois fonctions de variables réelles e^x, $\sin x$, $\cos x$. Pour $\sin x$ et $\cos x$, les dérivées de tous les ordres sont au plus égales en module à 1. Quant à e^x, les valeurs de toutes ses dérivées sont égales à e^x et forment par suite un ensemble borné.

Chacune de ces trois fonctions est donc représentable par une série entière; la formule de Maclaurin donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \ldots.$$

247. Soit maintenant z une variable complexe. Considérons les trois séries entières suivantes :

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots,$$

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \ldots.$$

On reconnaît que ces trois séries sont convergentes quel que soit z, car le module du rapport d'un terme au précédent tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Chacune de ces séries représente donc une fonction de la variable complexe z qui est holomorphe dans tout le plan. Nous constatons de plus que, si z reçoit une valeur réelle x, les fonctions obtenues sont identiques respectivement à e^x, $\sin x$, $\cos x$. *Par définition, lorsque z est une variable complexe, nous désignerons ces trois fonctions par* e^z, $\sin z$, $\cos z$.

$\cos z$ est une fonction paire, $\sin z$ une fonction impaire.

En prenant les dérivées des trois séries, on trouve $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Je dis que l'on a

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'},$$

z et z' étant deux quantités complexes quelconques. En effet, les séries représentant e^z et $e^{z'}$ sont, quels que soient z et z', deux séries absolument convergentes. On peut leur appliquer le théorème de la multiplication des séries (n° **232**, p. 28). Ordonnons les termes du

produit en groupant ensemble tous les termes de même degré h par rapport aux variables z et z'. Le terme général ainsi obtenu est

$$\frac{z^h}{h!}+\frac{z'}{1}\,\frac{z^{h-1}}{(h-1)!}+\frac{z'^2}{2!}\,\frac{z^{h-2}}{(h-2)!}+\ldots+\frac{z'^h}{h!},$$

ou encore

$$\frac{1}{h!}\left[z^h+\frac{h}{1}z'z^{h-1}+\frac{h(h-1)}{1.2}z'^2z^{h-2}+\ldots+z'^h\right],$$

ou

$$\frac{1}{h!}(z+z')^h.$$

On a donc

$$e^z e^{z'}=1+\sum_{h=1,2,\ldots}\frac{(z+z')^h}{h!}=e^{z+z'}.$$

248. Remplaçons z par iz dans le développement en série de e^z. Les termes de rang impair constituent le développement de $\cos z$, les termes de rang pair constituent le développement de $i\sin z$, d'où la relation

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

En remplaçant z par $-z$, on a

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z,$$

d'où, par addition et soustraction,

$$(1)\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

En élevant au carré ces deux expressions et en ajoutant, on obtient

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1.$$

Il existe pour $\sin z$ et $\cos z$ des formules d'addition identiques aux formules relatives aux variables réelles. Pour établir ces formules, partons de la relation

$$e^{iz}e^{iz'}=e^{i(z+z')},$$

c'est-à-dire

$$(\cos z+i\sin z)(\cos z'+i\sin z')=\cos(z+z')+i\sin(z+z'),$$

ou, en développant le premier membre,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos z\cos z'-\sin z\sin z'\\ \quad+i(\sin z\cos z'+\sin z'\cos z)=\cos(z+z')+i\sin(z+z').\end{array}\right.$$

Récrivons la même formule en changeant z en $-z$ et z' en $-z'$: il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos z \cos z' - \sin z \sin z' \\ \quad - i(\sin z \cos z' + \sin z' \cos z) = \cos(z+z') - i \sin(z+z').\end{array}\right.$$

Ajoutons et retranchons membre à membre les relations (2) et (3), il vient

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$

$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z.$$

Ce sont les mêmes relations que pour les variables réelles et, de même que pour les variables réelles, on en déduit toutes les relations qu'on obtient en trigonométrie.

On désigne par cos hyperbolique de z et sin hyperbolique de z, ce qu'on écrit $\operatorname{ch} z$ et $\operatorname{sh} z$, les fonctions suivantes :

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^{2p}}{2p!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots.$$

249. Considérons la fonction e^z, et mettons z sous la forme $x+iy$, x et y étant réels. Nous avons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

La partie réelle de la fonction e^z est donc $e^x \cos y$, le coefficient de i est $e^x \sin y$. Comme e^x est positif, *le module de e^z est e^x, son argument est y à un multiple de 2π près.* Quand z augmente de $2i\pi$, le module de e^z ne change pas, son argument augmente de 2π. On exprime ce résultat en disant que *e^z admet la période $2i\pi$.*

On en déduit que e^{iz} et e^{-iz} admettent la période 2π; par suite, d'après (1), il en est de même de $\cos z$ et $\sin z$.

Cherchons d'une manière générale à résoudre l'équation

$$e^z = u,$$

u étant une quantité donnée. Distinguons deux cas.

1° $u \neq 0$. Posons

$$u = \rho(\cos\omega + i \sin\omega) = \rho\, e^{i\omega}.$$

Nous savons que, si z est de la forme $x+iy$, e^z a pour module e^x et pour argument y. Pour que les deux nombres complexes e^z et u soient égaux, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux et que

leurs arguments diffèrent d'un multiple de 2π. On doit donc avoir

$$e^x = \rho, \qquad y = \omega + 2k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

La première équation détermine x et donne

$$x = \mathrm{L}\rho,$$

$\mathrm{L}\rho$ désignant le logarithme népérien (t. I, n° 73, p. 65); la seconde donne pour y une infinité de valeurs.

2° $u = 0$. Il n'y a pas alors de nombre réel x tel que l'on ait $e^x = 0$. Le problème est impossible.

250. Nous définirons les fonctions $\operatorname{tang} z$ et $\cot z$ par les formules

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

La première est définie pour toutes les valeurs de z, sauf celles pour lesquelles on a $\cos z = 0$, la seconde est définie pour toutes les valeurs de z, sauf celles pour lesquelles on a $\sin z = 0$; Or, on a $\cos z = 0$ quand on a

$$e^{iz} + e^{-iz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2iz} = -1,$$

et l'on a $\sin z = 0$ quand on a

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2iz} = 1.$$

D'ailleurs, en posant toujours $z = x + iy$, on a

$$e^{2iz} = e^{-2y} e^{2ix}.$$

Donc, pour ces points exceptionnels, on doit avoir $|e^{2iz}| = e^{-2y} = 1$, d'où $y = 0$, ce qui montre que z est *réel*.

Ainsi, les seules valeurs de z qui annulent $\cos z$ ou $\sin z$ sont les valeurs réelles de x qui annulent $\cos x$ ou $\sin x$, savoir $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $\cos z$ et $z = k\pi$ pour $\sin z$ (k entier).

On reconnaît que les fonctions $\operatorname{tang} z$ et $\cot z$ sont impaires et admettent la période π, d'après les propriétés de $\cos z$ et $\sin z$.

VIII. — Fonctions multiformes : $\operatorname{Log} z$, z^m, $\operatorname{arc\,tang} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$.

251. Nous avons vu que l'équation

$$e^u = z = \rho e^{i\omega},$$

si $\rho \neq 0$, a une infinité de racines différant entre elles de multiples

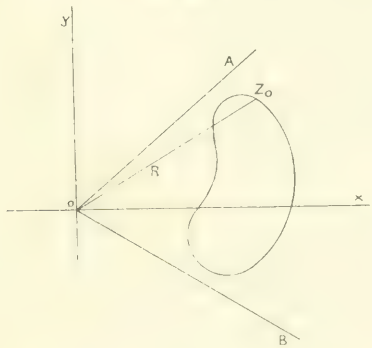
de $2i\pi$. Remarquons que, dans le cas de z réel et positif, une de ces racines est le nombre $L\rho$ (*cf.* t. I, n°s 62 et 73).

D'une manière générale, chacune de ces racines est dite le *logarithme de* z. Nous désignerons l'ensemble de ces valeurs par $\text{Log}\, z$. D'après cela, on a

$$u = \text{Log}\, z = L\rho + i(\omega + 2k\pi).$$

Imaginons qu'on parte d'un point z_0 du plan, distinct de l'origine, par suite tel que le module ρ_0 de ce point soit différent de zéro. Choisissons pour $\text{Log}\, z_0$ une détermination en fixant l'argument, soit ω_0. Cela étant, si un point z se déplace dans le plan en partant de z_0 et en décrivant une courbe quelconque sans passer jamais par l'origine, la détermination de l'argument de z qui part de ω_0 varie d'une façon continue et a pour chaque point de la courbe une valeur déterminée. La détermination de $\text{Log}\, z$ qui part de la valeur $L\rho_0 + i\omega_0$ est donc pour chaque point bien déterminée et varie d'une manière continue.

Fig. 23.



Prenons deux demi-droites partant de O et considérons l'une des régions R du plan limitées par ces deux droites (*fig.* 23). Si z se déplace dans cette région et revient à son point de départ, la détermination de l'argument ω qui part de ω_0 reprend sa valeur initiale : en effet, la variation de cet argument est égale à un multiple de 2π; or, elle est plus petite que l'angle formé par les deux droites qui limitent la région R, angle qui est lui-même plus petit que 2π. Donc cette variation est nulle, et par suite la détermination de $\text{Log}\, z$ qui part de la valeur $L\rho_0 + i\omega_0$ reprend cette valeur quand z revient à son point de départ z_0.

Supposons maintenant que z décrive un contour simple fermé entourant l'origine. La détermination de l'argument de z, qui est égale

à ω_0 quand z est en z_0, devient égale à $\omega_0 + 2\pi$ quand z revient en z_0 après avoir parcouru une fois le contour dans le sens positif. Si z décrivait le contour dans le sens négatif, cette détermination deviendrait $\omega_0 - 2\pi$. Dans tous les cas, la détermination de l'argument varie de 2π, et la détermination choisie pour $\operatorname{Log} z$ varie de $2i\pi$.

On est conduit à considérer toutes les déterminations de $\operatorname{Log} z$ *comme les déterminations différentes d'une même fonction*, qu'on dit être une fonction *multiforme*, ces déterminations étant susceptibles de s'échanger entre elles quand z se déplace dans le plan d'une manière continue.

Le point o autour duquel se permutent les déterminations est dit *point critique* pour la fonction $\operatorname{Log} z$.

Une détermination u de $\operatorname{Log} z$ est, dans la région R, dont on aura enlevé la partie contenue dans un cercle de centre o et de rayon ε, une fonction à détermination unique, autrement dit uniforme. C'est une fonction *inverse* (n° 218, p. 13) de $z = e^u$: c'est donc une fonction holomorphe de u et sa dérivée est

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}.$$

252. Si z et z' sont deux valeurs de la variable z telles que

$$z = \rho e^{i\omega}, \qquad z' = \rho' e^{i\omega'},$$

on a

$$\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} z' = \operatorname{L} \rho\rho' + i[\omega + \omega' + 2(k + k')\pi].$$

Or, le produit zz' a pour module $\rho\rho'$ et pour argument $\omega + \omega'$. On a donc

$$\operatorname{Log} zz' = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} z',$$

en entendant par là que la somme de deux déterminations quelconques de $\operatorname{Log} z$ et $\operatorname{Log} z'$ est une détermination de $\operatorname{Log} zz'$.

253. Si l'on considère la fonction $\operatorname{Log}(z - a)$, où a est un nombre complexe donné, en posant $z = a + z'$, on reconnaît que a joue pour cette fonction le rôle que joue o pour la fonction $\operatorname{Log} z$.

Elle a une infinité de déterminations dont chacune est holomorphe dans une région obtenue en menant par a deux demi-droites quelconques, en prenant la portion du plan comprise entre ces deux demi-droites après en avoir retranché un cercle de centre a et de rayon ε. On en déduit, par exemple, que chacune de ces déterminations est holomorphe dans un cercle du plan ne contenant pas le point critique a.

En particulier, appliquons ce résultat au cas de $\alpha = -1$. On voit que chaque détermination de $\text{Log}(1+z)$ est holomorphe dans tout cercle de centre O et de rayon plus petit que 1. Cette détermination est donc développable en série de Taylor, le développement étant valable pour tout point intérieur au cercle C de rayon 1. Prenons, par exemple, la détermination qui s'annule pour $z=0$, et cherchons son développement. On a

$$f(z) = \text{Log}(1+z),$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n},$$

d'où

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

La formule de Taylor donne donc

$$\text{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \dots,$$

le développement étant valable pour tous les points intérieurs au cercle C, réserve étant faite pour les points du cercle. En particulier, le développement est valable pour toutes les valeurs réelles de z inférieures à 1 en valeur absolue.

254. Nous allons faire maintenant l'étude de la série sur le cercle de convergence.

Deuxième lemme d'Abel. — *Soit $a_0, a_1, \dots, a_p, \dots$ une suite infinie de quantités telles que les sommes*

$$S_p = a_0 + a_1 + \dots + a_p \tag{1}$$

sont toutes inférieures en module à un nombre A. Soit d'autre part

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \dots, \quad \alpha_p, \quad \dots$$

une suite infinie de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro. Je dis que la série

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p + \dots \tag{2}$$

est convergente.

En effet, la somme

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+h},$$

qui est égale à $S_{n+h} - S_n$, est en module plus petite que $2A$. Donc,

par application du premier lemme d'Abel (n° **242**, p. 41), on a

$$|a_{n+1}\alpha_{n+1} + \ldots + a_{n+h}\alpha_{n+h}| < 2A\alpha_{n+1}.$$

Soit Σ_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série (2). Cette inégalité s'écrit

$$|\Sigma_{n+h} - \Sigma_n| < 2A\alpha_{n+1}.$$

Quand n croît indéfiniment, $2A\alpha_{n+1}$ tend vers zéro. Donc la somme Σ_n satisfait aux conditions du théorème de Cauchy (n° **210**, p. 4) et, par suite, a une limite; donc la série (2) est convergente.

255. Cela posé, étudions la série de terme général $(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ sur le cercle de rayon 1. On a sur ce cercle

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \qquad z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

θ désignant l'angle du rayon variable Oz avec Ox. Nous sommes conduits à étudier les séries

$$\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$

$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \ldots.$$

En changeant θ en $\theta+\pi$, ces séries se changent, au signe près, en

$$\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} + \ldots,$$

$$\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots.$$

Nous allons montrer que les sommes suivantes :

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta,$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta,$$

sont, quand n varie, bornées en module, quel que soit θ, excepté pour les valeurs de la forme $\theta = 2k\pi$.

Partons de l'identité

$$e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Dans le second membre, le numérateur est en module plus petit que 2. Le dénominateur est différent de zéro si $\theta \neq 2k\pi$. Donc, en écartant le cas de $\theta = 2k\pi$, on a

$$|e^{i\theta} + \ldots + e^{ni\theta}| < \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

et, en remplaçant θ par $-\theta$,

$$|e^{-i\theta}+\ldots+e^{-ni\theta}| < \frac{2}{|1-e^{-i\theta}|}.$$

Or, on a

$$\cos\theta+\ldots+\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+\ldots+e^{ni\theta}+e^{-i\theta}+\ldots+e^{-ni\theta}),$$

$$\sin\theta+\ldots+\sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}+\ldots+e^{ni\theta}-e^{-i\theta}-\ldots-e^{-ni\theta}).$$

Donc les deux sommes qui figurent dans les premiers membres de ces relations sont bornées quand n varie. On en déduit, par application du deuxième lemme d'Abel, la convergence des séries suivantes :

$$\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots,$$

$$\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\sin n\theta}{n}+\ldots,$$

et, par suite (en remplaçant θ par $\theta-\pi$), la convergence, pour $\theta\neq(2k+1)\pi$, des séries

$$\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots, \tag{1}$$

$$\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}+\ldots. \tag{2}$$

Pour $\theta=(2k+1)\pi$, la série (2) a tous ses termes nuls, mais la série (1) est divergente (série harmonique).

Donc la série

$$\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots$$

est convergente sur son cercle de convergence, sauf pour $z=-1$.

On a vu (n° **242**, p. 41) que, si une série est convergente en un point du cercle de convergence et si un point variable tend vers ce point du cercle en se déplaçant à l'intérieur du cercle sur le rayon correspondant, la valeur de la fonction sur le cercle est la limite de ses valeurs sur le rayon à l'intérieur du cercle. D'autre part, la fonction $\text{Log}(1+z)$ est continue quand z se déplace sur le rayon. Donc *il y a, en tous les points intérieurs au cercle et en tous les points du cercle, sauf au point* $z=-1$, égalité entre $\text{Log}(1+z)$ et la série précédente, la détermination de $\text{Log}\,z$ étant celle qui s'annule

en même temps que z. En résumé, on a, si $|z| \leqq 1$ et $z \neq -1$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots.$$

256. Quand z est égal à $e^{i\theta}$, on a

$$1 + z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Faisons varier θ entre $-\pi$ et $+\pi$, les valeurs extrêmes étant exclues. Dans ces conditions, $\cos\frac{\theta}{2}$ reste positif; donc on a

$$|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

Quant à l'argument de $1+z$, c'est $\frac{\theta}{2}$. Par conséquent, $\operatorname{Log}(1+z)$ a pour partie réelle $L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ et, pour coefficient de i, $\frac{\theta}{2} + 2k\pi$. Mais, d'après le développement en série de $\operatorname{Log}(1+z)$, la partie réelle de $\operatorname{Log}(1+z)$ est la série (1), le coefficient de i est la série (2). Nous avons donc, pour $-\pi < \theta < \pi$,

$$(3) \qquad L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \ldots,$$

$$(4) \qquad \frac{\theta}{2} + 2k\pi = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \ldots.$$

Considérons la formule (3). Une valeur *quelconque* de θ, augmentée d'un multiple convenable de 2π, donne une valeur θ_0 comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, et qui, par suite, vérifie la relation (3); on a d'ailleurs

$$\cos n\theta = \cos n\theta_0, \qquad \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta_0}{2}.$$

Donc, quel que soit $\theta \neq (2k+1)\pi$, on a

$$L\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \ldots.$$

Prenons maintenant la relation (4). Pour déterminer k, faisons $\theta = 0$. On trouve $k = 0$, de sorte que l'on a

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \ldots \qquad (-\pi < \theta < \pi).$$

Comme tous les termes du second membre ont pour période 2π, la

série du second membre est convergente quel que soit $\theta \neq (2k+1)\pi$. D'ailleurs, pour $\theta = (2k+1)\pi$, les termes de la série sont tous nuls. En résumé, *la série converge quel que soit* θ *et représente une* certaine fonction $f(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes :

Pour $-\pi < \theta < \pi$, on a $f(\theta) = \frac{\theta}{2}$.

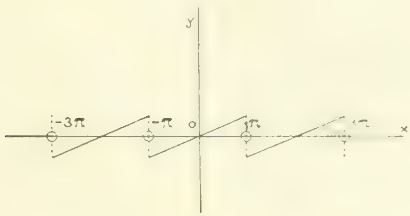
Pour $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$, on a $f(\theta) = 0$.

Par conséquent, si nous posons

$$\theta = x, \qquad f(\theta) = y,$$

$f(\theta)$ est représentée dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, les limites étant exclues, par un segment de droite ayant pour équation $y = \frac{x}{2}$ et par deux points isolés correspondant à ces limites (*fig.* 24).

Fig. 24.



Comme $f(\theta)$ est une fonction périodique et admet pour période 2π, on voit que, géométriquement, $f(\theta)$ sera représentée par une succession de segments de droites et de points isolés. Nous avons là un exemple de *fonction discontinue représentée par une série de fonctions continues.*

257. *Fonction* z^m. — z étant un nombre complexe quelconque différent de zéro, m un nombre complexe quelconque, nous poserons par définition

$$z^m = e^{m \operatorname{Log} z},$$

$\operatorname{Log} z$ étant l'une quelconque des déterminations de la fonction logarithmique définie précédemment. Remarquons que cette relation est bien vérifiée dans le cas où z est réel et positif, et m réel, $\operatorname{Log} z$ étant remplacé par Lz (*cf.* t. I, n°s 62 et 73). Dans le cas général, soit

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad m = p + iq.$$

On a alors

$$z^m = e^{(p+iq)[\mathrm{L}\rho + i(\varphi+2k\pi)]} = e^{p\mathrm{L}\rho - q(\varphi+2k\pi)}\, e^{i[q\mathrm{L}\rho + p(\varphi+2k\pi)]}.$$

Il y a pour z^m une infinité de déterminations. Dans toute région du plan où une détermination de $\mathrm{Log}\, z$ est fonction holomorphe de z, z^m est aussi fonction holomorphe de z.

Considérons en particulier le cas où m est réel ; nous avons $q = 0$, d'où

$$z^p = e^{p\mathrm{L}\rho}\, e^{ip(\varphi+2k\pi)}.$$

Si p est entier, on voit qu'il y a pour z^p une seule détermination.

Si p est fractionnaire et égal à une fraction irréductible $\frac{r}{s}$, deux déterminations différentes de z^p diffèrent par le facteur $e^{ip2k\pi}$. Cette quantité peut prendre s valeurs distinctes. Il y a donc pour z^p s déterminations. Ces déterminations se permutent l'une dans l'autre quand z décrit un cercle de centre O, car, dans ce mouvement, l'argument de z augmente ou diminue de 2π.

Si p est irrationnel, il y a pour z^p une infinité de déterminations.

Sauf dans le cas où m est entier $\geqq 0$, le point $z = 0$ est critique.

Dans tous les cas, une détermination de z^m a une dérivée que nous allons calculer. On a, comme $z^m = e^{m\,\mathrm{Log}\, z}$,

$$(z^m)' = (e^{m\,\mathrm{Log}\, z})' = e^{m\,\mathrm{Log}\, z} \times \frac{m}{z} = m z^{m-1},$$

la détermination de z^{m-1} étant obtenue en prenant le même argument que dans la détermination choisie pour z^m.

258. Au lieu de z^m, considérons la fonction $(1+z)^m$. C'est le point $z = -1$ qui est point critique pour cette fonction, comme $z = 0$ l'est pour la fonction z^m. Dans tout cercle de centre O et de rayon plus petit que 1, $(1+z)^m$ est holomorphe. Il en résulte que le développement en série de Taylor est valable à l'intérieur du cercle de rayon 1. On a

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1+z)^m,\\
f'(z) &= m(1+z)^{m-1},\\
f''(z) &= m(m-1)(1+z)^{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f^{p}(z) &= m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+z)^{m-p}.
\end{aligned}$$

Prenons *la détermination de* $(1+z)^m$ *qui est égale à* 1 *pour*

$z=0$. On voit que, pour $z=0$, $f, f', f'', \ldots, f^p$ prennent respectivement les valeurs $1, m, m(m-1), \ldots, m(m-1)\ldots(m-p+1)$, d'où

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}z^p + \ldots.$$

C'est la *série du binome*; elle est applicable pour $|z|<1$.

259. La fonction z^m, quand m n'est pas entier, donne un exemple de fonction multiforme. Prenons, pour fixer les idées, la fonction

$$u = z^{\frac{1}{q}},$$

q étant entier positif. Avec les notations précédentes, nous aurons

$$z^{\frac{1}{q}} = \rho^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{q} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{q}\right).$$

Cette fonction a, comme nous l'avons vu, q déterminations qui s'obtiennent en donnant, à l'entier k, q valeurs entières consécutives, par exemple les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Une détermination de u correspondant à la valeur k se change, quand le point z décrit dans le sens positif un cercle de centre O, en la détermination correspondant à $k+1$. u est donc une fonction multiforme à q déterminations, ayant pour point critique l'origine.

260. Pour prendre un autre exemple, considérons la fonction u définie par l'équation suivante :

$$u^2 = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_p),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des nombres complexes distincts. Quand z est distinct de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, il y a deux valeurs distinctes de u satisfaisant à cette équation. Posons

$$z-a_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \ldots, \quad z-a_p = r_p e^{i\theta_p}.$$

On a

$$u^2 = r_1 r_2 \ldots r_p e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_p)}.$$

u a donc toujours pour module $(r_1 r_2 \ldots r_p)^{\frac{1}{2}}$. Soit θ l'argument de u. 2θ est l'argument de u^2, mais u^2 a aussi pour argument

$$\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_p.$$

à un multiple de 2π près. On a donc

$$2\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p + 2k\pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{2} + k\pi.$$

Suivant que k est pair ou impair, on a deux séries de valeurs pour θ et, par suite, deux déterminations opposées pour u. Quand z décrit un cercle de centre a_1 ne contenant aucun des points $a_2, \ldots, a_p$, l'argument θ_1 varie de 2π; donc θ varie de π, chacune des déterminations de u se change en l'autre. La fonction u est donc une fonction multiforme à deux déterminations, ayant pour points critiques les points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

261. *Fonction* arc tang z. — Nous définissons la fonction

$$u = \text{arc tang}\, z$$

par la relation

$$z = \text{tang}\, u.$$

En remplaçant tang u par sa valeur (n° 250, p. 50), on obtient l'équation

$$z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \frac{e^{2iu} - 1}{i(e^{2iu} + 1)},$$

qui, résolue par rapport à e^{2iu}, donne

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2i}\,\text{Log}\,\frac{i - z}{i + z}.$$

Nous prendrons donc par définition

$$\text{arc tang}\, z = \frac{1}{2i}\,\text{Log}\,\frac{i - z}{i + z}.$$

arc tang z est ainsi une fonction multiforme. Cherchons ses points critiques.

Il y a point critique pour $\text{Log}\,\frac{i - z}{i + z}$ et, par suite, pour arc tang z si l'on a

$$z = \pm i.$$

Dans un cercle qui ne contient aucun de ces points, toute déter-

mination du Log et, par suite, de arc tang z est holomorphe. Quand z décrit un petit cercle autour de l'un de ces points, la détermination choisie pour le Log augmente de $\pm 2i\pi$, la détermination correspondante de arc tang z augmente de $\pm \pi$. D'ailleurs, comme $z = \text{tang}\, u$ admet la période π, il est sûr que u a une infinité de déterminations différentes entre elles de multiples de π.

Cherchons la dérivée de arc tang z. Nous avons

$$z'_u = 1 + \text{tang}^2 u,$$

d'où

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Toute détermination de arc tang z est holomorphe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, puisque les seuls points critiques sont sur ce cercle. Pour avoir le développement en série entière de arc tang z, remarquons que nous avons immédiatement celui de la dérivée ; on a, en effet, pour $|z| < 1$,

$$u'_z = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots,$$

d'où, par intégration,

$$\text{arc tang}\, z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots,$$

la détermination de arc tang z ainsi obtenue étant celle qui s'annule avec z, et le développement étant valable pour $|z| < 1$.

On arrive au même résultat en partant de la formule

$$\text{arc tang}\, z = \frac{1}{2i}[\text{Log}(1 + iz) - \text{Log}(1 - iz)]$$

et des développements

$$\text{Log}(1 + iz) = \sum \frac{(-1)^{n-1}(iz)^n}{n} \qquad (z \neq i),$$

$$\text{Log}(1 - iz) = \sum \frac{(-1)^{n-1}(-iz)^n}{n} \qquad (z \neq -i).$$

Cette méthode montre que *le développement de* arc tang z *est valable sur le cercle de convergence, sauf pour* $z = \pm i$.

En particulier, pour x réel et tel que $-1 \leqq x \leqq 1$, le développement représente la détermination de arc tang x qui s'annule avec x.

262. *Fonction* arc sin z. — Nous définirons la fonction

$$u = \text{arc} \sin z$$

par la relation

$$z = \sin u = \frac{1}{2i}(e^{iu} - e^{-iu}) = \frac{e^{2ui} - 1}{2ie^{ui}}.$$

Posons $e^{ui} = t$; t est donné par la relation

$$2izt = t^2 - 1$$

ou

$$t^2 - 2izt - 1 = 0,$$

d'où, en résolvant cette équation du second degré,

$$t = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

On a donc

$$u = \frac{1}{i}\,\text{Log}\, t = \frac{1}{i}\,\text{Log}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

On voit qu'il y a pour u une infinité de déterminations se groupant en deux séries suivant le signe choisi devant le radical. D'ailleurs, la quantité dont on prend le Log ne s'annule jamais, car il faudrait pour cela que l'on eût

$$(iz)^2 = 1 - z^2, \qquad \text{d'où} \qquad 1 = 0.$$

Les seuls points critiques de u sont les points $z = \pm 1$, pour lesquels il y a échange de déterminations pour le radical.

Pour avoir la dérivée de u, appliquons le théorème des fonctions inverses ; on trouve

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{\cos u} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Toute détermination de arc sin z est holomorphe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, par suite, est développable en série entière dans ce cercle.

Pour avoir ce développement, cherchons le développement de la dérivée $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la série du binome. Le terme général est

$$\frac{(-1)^p\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\dots\left(-\frac{1}{2} - p + 1\right)z^{2p}}{p!} = \frac{1.3\dots(2p - 1)z^{2p}}{2^p\, p!}.$$

En intégrant la série $\sum \frac{1.3\dots(2p-1)z^{2p}}{2^p\, p!}$, on a le développement cherché :

$$\text{arc} \sin z = \frac{z}{1} + \dots + \frac{1.3\dots(2p - 1)}{2^p\, p!}\,\frac{z^{2p+1}}{2p + 1} + \dots,$$

le développement étant valable à l'intérieur du cercle de rayon 1 et la détermination considérée étant la détermination de arc sin z qui s'annule avec z. En particulier, pour x réel et compris entre -1 et $+1$, le développement est valable et représente la fonction réelle arc sin x qui s'annule avec x. On constate, de plus, que la série est convergente pour $x = \pm 1$; le développement s'applique donc encore à ces valeurs, d'après un raisonnement déjà employé (n° 255, p. 59).

263. *Application à l'intégration des fractions rationnelles.* — Cette étude montre l'analogie qu'il y a, d'une part, entre la fonction logarithmique et les fonctions circulaires inverses, d'autre part, entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Reprenons, au point de vue complexe, l'étude des fractions rationnelles; une telle expression est une somme d'éléments de la forme $\frac{A}{(z-a)^p}\cdot$ L'intégrale de cette expression est $\frac{1}{1-p}\frac{A}{(z-a)^{p-1}}$ si $p > 1$ et $A\,\text{Log}(z-a)$ si $p = 1$.

Pour rattacher ces résultats à ceux qu'on a acquis dans le cas des variables réelles (t. I, n° 96, p. 83), supposons qu'on opère la décomposition d'une fraction rationnelle *à coefficients réels* en éléments simples, sans réunir ensuite les éléments correspondant aux racines imaginaires conjuguées. Soient, par exemple,

$$\frac{M_1+N_1 i}{x-\alpha-\beta i}+\frac{M_2+N_2 i}{(x-\alpha-\beta i)^2}+\ldots+\frac{M_h+N_h i}{(x-\alpha-\beta i)^h},$$
$$\frac{M_1-N_1 i}{x-\alpha+\beta i}+\frac{M_2-N_2 i}{(x-\alpha+\beta i)^2}+\ldots+\frac{M_h-N_h i}{(x-\alpha+\beta i)^h}$$

les termes correspondant à deux racines imaginaires conjuguées d'ordre h, $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$.

Nous avons, comme intégrale des termes dont le dénominateur est de degré $\lambda\,(\lambda \geqq 2)$, à un facteur numérique près,

$$\frac{M_\lambda+N_\lambda i}{(x-\alpha-\beta i)^{\lambda-1}}+\frac{M_\lambda-N_\lambda i}{(x-\alpha+\beta i)^{\lambda-1}}.$$

La somme de ces deux quantités est réelle.

Quant aux termes dont le dénominateur est de degré 1, ils donnent

$$(M_1+N_1 i)\,\text{Log}(x-\alpha-\beta i)+(M_1-N_1 i)\,\text{Log}(x-\alpha+\beta i).$$

Soient ρ le module et φ l'argument de la quantité $x-\alpha-\beta i$, on a

$$\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \varphi = \text{arc tang}\,\frac{\beta}{x-\alpha}.$$

et l'expression précédente devient

$$(M_1 + N_1 i)(L\rho - i\varphi) - (M_1 - N_1 i)(L\rho + i\varphi),$$

c'est-à-dire, après réduction,

$$2M_1 L\rho + 2N_1\varphi.$$

On retrouve les résultats précédemment établis.

Comme cas particulier, rappelons les formules suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(x + \sqrt{1+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x.$$

Au point de vue des variables complexes, ces deux formules n'en forment qu'une seule, à cause de l'identité de la fonction arc sin avec la fonction Log. On passe de l'une à l'autre en changeant x en ix.

IX. — Généralités sur les fonctions analytiques.

264. — On appelle *fonction analytique* une fonction d'une variable complexe z qui est holomorphe au moins dans une certaine région, sauf en certains points exceptionnels.

Un point a tel que la fonction analytique $f(z)$ est holomorphe dans un certain cercle de centre a est dit *point régulier* pour $f(z)$; on dit que $f(z)$ est *régulière* en a. On sait (nº 244) que dans un tel cercle $f(z)$ est représentable par une série entière en $(z - a)$.

On appelle *fonction entière* une fonction analytique qui est régulière en tout point du plan, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan.

Citons, comme exemple de fonctions entières, les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, un polynome en z, ou encore toute série entière obtenue en multipliant les termes de la série e^z, par exemple, par des nombres arbitraires dont l'ensemble des modules est borné.

265. Théorème de Liouville. — *Une fonction entière dont le module est borné se réduit à une constante.*

En effet, soit $f(z)$ une fonction entière dont le module a pour borne supérieure un nombre fini A. Cette fonction est développable en série entière en z : le terme général du développement est $\frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

On a, pour $n \geqq 0$,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

γ étant un cercle quelconque de centre O; soit R le rayon de ce cercle. Évaluons une limite supérieure du module de $f^{(n)}(0)$. On a

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| < \frac{A}{R^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{|f_0^{(n)}|}{n!} < \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{A}{R^{n+1}} = \frac{A}{R^n}.$$

Comme R peut être pris aussi grand que l'on veut, le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut; donc, quel que soit n, $f^{(n)}(0)$ est nul. Par suite, dans le développement de Taylor,

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots,$$

tous les termes sont nuls à partir du second; $f(z)$ se réduit à une constante.

266. Étant donnée une fonction analytique $f(z)$, tout point non régulier pour cette fonction est dit *point singulier*. Nous dirons que a est un *point singulier isolé* pour $f(z)$ si l'on peut trouver un cercle de centre a dans lequel n'existe pas d'autre point singulier que a.

Une première catégorie de points singuliers est constituée par les *pôles*. On dit que *a est un pôle d'ordre p* pour $f(z)$ si la fonction $(z-a)^p f(z)$, p étant un certain entier positif, admet a comme point régulier et tend vers une valeur différente de zéro quand z tend vers a. Dans cette hypothèse, la fonction $(z-a)^p f(z)$ est holomorphe dans un certain cercle de centre a; on a donc un développement de la forme suivante :

$$(z-a)^p f(z) = B_0 + B_1(z-a) + \ldots + B_p(z-a)^p + B_{p+1}(z-a)^{p+1} + \ldots,$$

d'où

$$f(z) = \frac{B_0}{(z-a)^p} + \frac{B_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + B_p + B_{p+1}(z-a) + \ldots.$$

A partir du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme, on a une série entière en $z-a$, de sorte que la fonction $f(z)$ est représentée dans un certain cercle de centre a, en mettant à part le point a, par un développement qui comprend une série entière en $z-a$ et un nombre fini de fractions rationnelles. On voit que, quand z tend vers a, le module de f augmente indéfiniment.

On appelle *partie principale* du développement de $f(z)$ l'ensemble des termes fractionnaires.

267. Prenons comme exemple une fraction rationnelle irréductible $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Elle a comme pôles toutes les valeurs de z qui annulent Q, l'ordre de chaque pôle étant le degré de multiplicité de ce point en tant que racine de Q. En effet, si a est racine d'ordre p de $Q(z)$, on peut poser

$$Q(z) = (z-a)^p R(z) \qquad [R(a) \neq 0],$$

de sorte que l'on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{(z-a)^p} \frac{P(z)}{R(z)}.$$

Dans un cercle de centre a et de rayon assez petit, $R(z)$ est différent de zéro; donc $\frac{P(z)}{R(z)}$ est fonction holomorphe dans ce cercle et a une valeur différente de zéro au point a. Donc ce point a est pôle d'ordre p pour $\frac{P}{Q}$.

Comme autre exemple, prenons la fonction

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

on reconnaît que l'on a

$$\sin z = z\psi(z),$$

$\psi(z)$ tendant vers 1 lorsque z tend vers zéro. Donc $z \cot z$ est fonction holomorphe de z au voisinage de l'origine. Par suite, $z = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour $\cot z$.

268. *Un pôle, pour une fonction analytique, est un point singulier isolé.* — En effet, si a est pôle d'ordre p pour $f(z)$, cette fonction $f(z)$ est égale, dans un certain cercle C de centre a, à la somme d'une fonction holomorphe de z et de l'expression

$$\frac{B_0 + B_1(z-a) + \ldots + B_{p-1}(z-a)^{p-1}}{(z-a)^p},$$

laquelle est le quotient de deux fonctions qui sont holomorphes dans tout cercle C' contenu dans C et ne contenant pas a. Donc $f(z)$ est holomorphe dans les mêmes conditions. Il n'y a donc pas dans C de point singulier autre que a.

269. Une fonction analytique est dite *méromorphe* dans une certaine région si, dans cette région, elle n'a pas d'autres points singuliers que des pôles. Par exemple, une fraction rationnelle en z est fonction méromorphe dans tout le plan, car elle ne cesse d'être régulière qu'en un pôle.

Dans un domaine borné, les pôles d'une fonction méromorphe sont en nombre fini, car, si cela n'était pas, il y aurait (t. I, p. 42) un point A tel que tout cercle de centre A contiendrait une infinité de pôles; A ne serait donc ni un point régulier, ni un pôle (qui est nécessairement isolé).

Remarquons que, si $f(z)$ est analytique, son inverse $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ l'est aussi (n° 215, p. 9). En un point a où $f(z)$ est régulière et différente de zéro, $\varphi(z)$ est régulière. En un point a tel que

$$f(z) = (z-a)^p \psi(z),$$

p étant positif et $\psi(a)$ étant différent de zéro, on a

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \frac{1}{\psi(z)},$$

a est donc un pôle d'ordre p pour φ; on dit que c'est un *zéro d'ordre p* pour f. Inversement, un pôle d'ordre p pour f est un zéro d'ordre p pour φ. Il résulte de là que *les zéros d'une fonction analytique, c'est-à-dire les points pour lesquels elle est nulle, sont des points isolés*, puisque ce sont les pôles d'une fonction analytique. On en déduit aussi que, *dans un domaine borné, une fonction méromorphe a un nombre fini de zéros.*

270. Tout point singulier d'une fonction analytique qui n'est pas pôle est dit *point singulier essentiel*. Il y a lieu d'étudier d'abord les *points singuliers essentiels isolés*.

Soit a un point singulier isolé. Traçons un cercle C de centre a ne contenant pas d'autre point singulier que a et un cercle C' concentrique et intérieur à C. Dans la couronne comprise entre ces deux cercles, $f(z)$ est holomorphe et par suite développable en série de Laurent (n° 245, p. 46). Comme les coefficients du développement ne dépendent pas du rayon de C', le développement est valable en tout point intérieur à C autre que a. Ainsi, *étant donné un point singulier isolé a, $f(z)$ est représentable en tout point intérieur à un certain cercle de centre a, sauf au point a, par un développe-*

ment de la forme suivante :

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots$$

Si les termes fractionnaires de ce développement sont en nombre limité, a est un pôle et réciproquement. Il n'y a point singulier essentiel que si ces termes sont en nombre illimité.

Prenons, par exemple, la fonction $e^{\frac{1}{z}}$. On reconnaît que l'on a en tout point, l'origine étant mise à part,

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \ldots$$

L'origine est un point singulier essentiel isolé pour cette fonction.

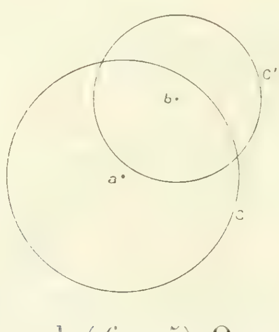
271. *Point à l'infini.* — Il peut y avoir lieu d'étudier une fonction analytique $f(z)$ quand z croît indéfiniment. On pose pour cela

$$z = \frac{1}{z'},$$

et l'on étudie la fonction $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ au voisinage du point $z' = 0$. Suivant que ce point est régulier ou singulier, zéro ou pôle pour $\varphi(z')$, on convient de dire que le *point à l'infini* du plan des z est pour $f(z)$ un point régulier ou singulier, un zéro ou un pôle.

272. *Prolongement analytique.* — Étant donnée une fonction analytique holomorphe dans un certain cercle C de centre a, soit b

Fig. 25.



un point intérieur à ce cercle (*fig.* 25). On sait que, dans C, la fonction est représentable par une série entière en $z-a$, soit $P(z-a)$.

Or, il existe un cercle de centre b tel que la fonction est aussi

holomorphe dans ce cercle, de sorte qu'il existe pour la fonction un développement en série entière en $z - b$, soit $Q(z - b)$. Il peut arriver que cette dernière série ait pour cercle de convergence un cercle C′ renfermant une partie extérieure à C.

Les deux développements $P(z - a)$, $Q(z - b)$ représentent la même fonction $f(z)$ dans la partie commune à C et C′. On dit que ces deux séries sont le *prolongement analytique* l'une de l'autre, et que ce sont *deux éléments d'une même fonction analytique*.

Partant de C′, on pourra répéter la même opération, et ainsi de suite. On peut ainsi définir une fonction analytique dans toute la région du plan dont les points sont intérieurs à l'un au moins des cercles d'une série C, C′, C″, ..., deux cercles consécutifs ayant toujours une partie commune. L'opération que l'on effectue ainsi s'appelle le *prolongement analytique* de la fonction donnée.

X. — Résidus.

273. Soit a un point singulier isolé pour la fonction $f(z)$. Considérons (n° 245, p. 46) le coefficient B_1 de $\frac{1}{z - a}$ dans la série de Laurent qui représente $f(z)$ dans un cercle γ de centre a, ne contenant pas d'autre point singulier que a. On a

$$B_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz$$

ou encore

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi B_1.$$

Le nombre B_1 est dit le *résidu* de la fonction relatif au point singulier a.

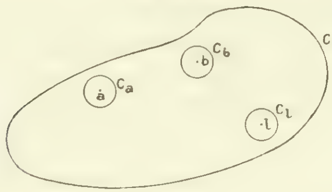
274. Théorème des résidus. — *Soit $f(z)$ une fonction analytique considérée dans une région* R *dont la frontière est un contour simple* C, *f étant régulière en tout point de* C *et ayant dans la région* R *un nombre fini de points singuliers, a, b, ..., l* (*fig.* 26).

Évaluons l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$. Pour cela, de chacun des points singuliers a, b, ..., l comme centre, décrivons un cercle qui ne contienne pas d'autre point singulier que son centre. Soient C_a,

$C_b, \ldots, C_l$ ces cercles. On a (n° **225**, p. 19)

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_a} f(z)\,dz + \int_{C_b} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_l} f(z)\,dz,$$

Fig. 26.



car $f(z)$ est régulière en tout point de la région obtenue en enlevant de R ces différents cercles.

D'après le n° **273**, en appelant A, B, ..., L les résidus de f relatifs à a, b, ..., l, la formule précédente donne

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi(A + B + \ldots + L).$$

Ainsi *l'intégrale de f prise dans le sens positif le long de* C *est égale au produit par* $2i\pi$ *de la somme des résidus relatifs aux différents points singuliers contenus dans* R. C'est le théorème général des résidus.

275. Considérons le résidu relatif à un pôle a d'ordre 1. Il y a dans le développement de f un seul terme fractionnaire; son coefficient, qui est le résidu, est donc certainement différent de zéro. C'est la limite, pour $z = a$, de l'expression $(z - a)f(z)$. Supposons, par exemple, que $f(z)$ puisse se mettre sous la forme d'une fraction $\frac{P(z)}{Q(z)}$, a étant zéro simple de Q et n'annulant pas P. On a, dans ces conditions,

$$Q(z) = (z - a)R(z), \qquad R(a) \neq 0.$$

Le résidu relatif à a est $\frac{P(a)}{R(a)}$. Or, on déduit de la relation précédente

$$Q'(z) = R(z) + (z - a)R'(z),$$

d'où, en faisant $z = a$,

$$Q'(a) = R(a),$$

de sorte que le résidu est égal à $\frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Si a est pôle d'ordre $p > 1$ pour f, le résidu est le coefficient de $(z-a)^{p-1}$ dans le développement de la fonction holomorphe

$$(z-a)^p f(z).$$

Il convient de remarquer que, dans le cas d'un pôle d'ordre supérieur à 1 ou d'un point singulier essentiel, le résidu peut être différent de zéro ou nul.

276. Supposons que $f(z)$ soit méromorphe dans la région R, c'est-à-dire n'ait pas d'autres points singuliers que des pôles. Considérons l'intégrale $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$. La fonction $\frac{f'}{f}$ ne peut avoir pour points singuliers que les zéros et les pôles de f. Soit a un pôle ou zéro de f.
On peut poser, dans les deux cas,

$$f(z) = (z-a)^p \varphi(z),$$

$\varphi(a)$ étant fini et différent de zéro. Si $p < 0$, a est un pôle d'ordre égal à $-p$; si $p > 0$, a est un zéro d'ordre p.

On a, par dérivation logarithmique,

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{p}{z-a}.$$

La fonction $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est régulière au point a, de sorte que la fonction $\frac{f'}{f}$ admet a comme pôle simple, le résidu correspondant étant p. On en conclut que, si f possède dans la région R, limitée par le contour simple C, h pôles et k zéros, chaque zéro ou pôle étant compté avec son ordre de multiplicité, on a

$$\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = 2i\pi(k-h).$$

277. Le théorème des résidus a de nombreuses applications; il permet, par exemple, d'évaluer certaines intégrales définies réelles.

Prenons la fonction

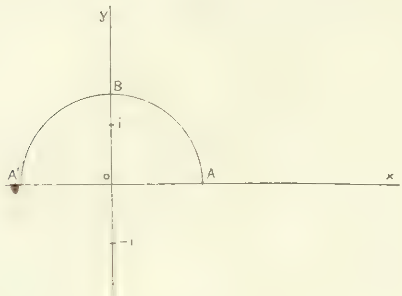
$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1},$$

m étant un nombre positif. Cette fonction admet comme points singuliers les deux points i et $-i$. Considérons le contour formé par une demi-circonférence de rayon $R > 1$ et un diamètre A'A de cette

demi-circonférence (*fig.* 27); on a, d'après le théorème des résidus,

$$\int_{ABA'A} f(z)\,dz = 2i\pi R_i.$$

Fig. 27.



R_i étant le résidu relatif au point singulier $z = i$. Comme i est une racine simple de $1 + z^2$, on a

$$R_i = \lim_{z=i}(z-i)f(z) = \lim_{z=i}\frac{e^{imz}}{z+i},$$

d'où

$$R_i = \frac{e^{-m}}{2i}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \int_{ABA'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}.$$

D'autre part, évaluons directement l'intégrale prise d'abord le long de la demi-circonférence ABA', puis le long du diamètre A'A. On a, sur le cercle,

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où

$$e^{imz} = e^{mR(i\cos\theta - \sin\theta)},$$
$$|e^{imz}| = e^{-mR\sin\theta};$$

$m\sin\theta$ reste positif ou nul sur la demi-circonférence ABA', d'où

$$|e^{imz}| \leq 1,$$

et, comme le module de la somme $z^2 + 1$ est supérieur ou égal à la différence des modules $R^2 - 1$, on a

$$\left|\frac{e^{imz}}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R^2-1},$$

d'où, la longueur de ABA' étant πR,

$$\left|\int_{ABA'} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz\right| < \pi R\,\frac{1}{R^2-1}.$$

On voit que, quand R grandit indéfiniment, le module de l'intégrale prise le long de la demi-circonférence ABA' tend vers zéro. D'ailleurs, on a, d'après (1),

$$(2) \qquad \pi e^{-m} = \int_{ABA'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \int_{ABA'} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz + \int_{A'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz.$$

Sur le diamètre A'A, z est réel; donc

$$\int_{A'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx.$$

Si nous faisons grandir R indéfiniment, la relation (2) donne, à la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-m}.$$

En séparant dans cette intégrale la partie réelle et le coefficient de i, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-m}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x^2+1}\,dx = 0.$$

La seconde de ces relations est évidente si l'on remarque que la fonction que l'on intègre est impaire, et que, par suite, les deux parties de l'intégrale concernant les intervalles $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ ont une somme nulle.

La première relation donne la valeur d'une intégrale définie réelle.

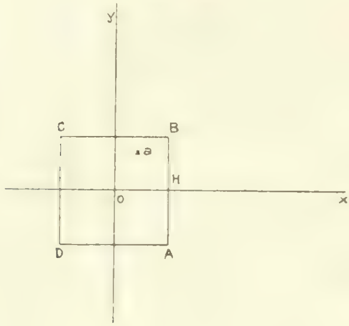
278. Comme autre application du calcul des résidus, considérons la fonction $\cot z$. Elle a pour singularités les zéros de $\sin z$, qui sont (n° **250**, p. 50) les multiples de π; chacun d'eux est zéro simple pour $\sin z$. En effet, nous l'avons constaté pour $z = 0$, et la propriété en résulte pour les autres à cause de la périodicité de $\sin z$. Ainsi $\cot z$ *est une fonction méromorphe qui admet comme pôles simples tous les points* $z = k\pi$.

Soit a un point quelconque du plan distinct des points $k\pi$. Prenons un carré Γ de côtés parallèles aux axes et de centre O, qui contienne à son intérieur le point a et dont les intersections avec Ox

soient de la forme $x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, m étant entier (*fig.* 28). Appliquons le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\Gamma \frac{\cot z}{z-a}\,dz.$$

Fig. 28.



La fonction $\frac{\cot z}{z-a}$ a pour pôles les pôles de $\cot z$ et le point $z = a$. Les pôles de $\cot z$ contenus à l'intérieur de Γ sont les points 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ..., $\pm m\pi$. Le résidu R_h relatif au point $z = h\pi$ est égal à

$$\lim_{z=h\pi} \frac{(z-h\pi)\cot z}{z-a}.$$

Posons $z = h\pi + z'$; on a

$$\lim_{z=h\pi} \frac{(z-h\pi)\cot z}{z-a} = \lim_{z'=0} \frac{z'\cot(h\pi+z')}{h\pi+z'-a}$$

ou encore

$$R_h = \lim_{z'=0} \frac{z'}{\sin z'}\,\frac{\cos z'}{h\pi+z'-a} = \frac{1}{h\pi-a}.$$

Pour le point $z = a$, le résidu est $\cot a$. Par conséquent, on a, par le théorème des résidus,

$$(1) \qquad \int_\Gamma \frac{\cot z}{z-a}\,dz = 2i\pi\left(\cot a + \sum_{h=0,\pm1,\ldots,\pm m} \frac{1}{h\pi-a}\right).$$

Cherchons maintenant à évaluer directement l'intégrale du premier membre. Écrivons

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2\left(1-\frac{a}{z}\right)},$$

d'où

$$(2)\qquad \int_{\Gamma} \frac{\cot z}{z-a}\,dz = \int_{\Gamma} \frac{\cot z}{z}\,dz + a\int_{\Gamma} \frac{\cot z}{z^2\left(1-\dfrac{a}{z}\right)}\,dz.$$

La première intégrale du second membre est nulle ; en effet, $\frac{\cot z}{z}$ est une fonction paire de z et le contour Γ est symétrique par rapport à l'origine. Donc deux éléments du contour symétriques par rapport à O donnent deux éléments d'intégrale dont la somme est nulle.

Étudions la seconde intégrale lorsque Γ s'éloigne indéfiniment. Évaluons le module de $\cot z$. On a

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}},$$

ou, en remplaçant z par $x+iy$,

$$\cot z = i\,\frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)},$$

$$\cot z = \frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x + i(e^{y}+e^{-y})\cos x}{-(e^{y}-e^{-y})\cos x + i(e^{y}+e^{-y})\sin x},$$

d'où, en prenant le module du numérateur et le module du dénominateur,

$$|\cot z| = \sqrt{\frac{(e^{y}-e^{-y})^2\sin^2 x + (e^{y}+e^{-y})^2\cos^2 x}{(e^{y}-e^{-y})^2\cos^2 x + (e^{y}+e^{-y})^2\sin^2 x}},$$

$$(3)\qquad |\cot z| = \sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}}.$$

Cela posé, considérons d'abord (*fig.* 28) les côtés AB et DC. Sur ces côtés, $2x$ est de la forme $(2m+1)\pi$, $\cos 2x$ est égal à -1 ; donc on a, d'après (3),

$$|\cot z| < 1.$$

Prenons maintenant les côtés BC et AD, et remarquons que l'on a toujours, en vertu de $-1 \leqq \cos 2x \leqq 1$,

$$|\cot z| \leqq \sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{e^{2y}+e^{-2y}-2}}.$$

Sur BC et AD, cette limite supérieure du module est constante puisque y est constant. Quand y croît indéfiniment, elle tend vers 1. Par conséquent, en se donnant un nombre plus grand que 1, par exemple 2, il est possible de prendre m assez grand pour que l'on ait en tout point de Γ

$$|\cot z| < 2.$$

D'autre part, si m est assez grand, on a, pour tout point z de Γ,

$$\left|\frac{a}{z}\right| < \frac{1}{2}, \qquad \left|1 - \frac{a}{z}\right| > \frac{1}{2}.$$

Supposons toutes ces conditions remplies, et évaluons alors une limite supérieure du module de la seconde intégrale du second membre de (2). On a (*fig.* 28), comme $|z| \geq$ OH,

$$\left|\frac{\cot z}{z^2\left(1 - \dfrac{a}{z}\right)}\right| < \frac{2}{\mathrm{OH}^2 \dfrac{1}{2}},$$

d'où, la longueur du contour étant 8OH,

$$\left|\int_\Gamma \frac{\cot z}{z^2\left(1 - \dfrac{a}{z}\right)}\,dz\right| < 8\,\mathrm{OH}\,\frac{4}{\mathrm{OH}^2}.$$

Quand OH grandit indéfiniment, le module de cette intégrale tend donc vers o, par suite aussi celui de $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cot z}{z - a}\,dz$. En nous reportant à l'équation (1) et faisant grandir m indéfiniment, on obtient

$$\lim_{m=\infty}\left(\cot a + \sum_{h=0,\pm1,\ldots,\pm m} \frac{1}{h\pi - a}\right) = 0,$$

d'où, en mettant z au lieu de a, et en réunissant (pour $h \neq 0$) les deux termes $\dfrac{1}{z - h\pi} + \dfrac{1}{z + h\pi}$ en un seul, savoir $\dfrac{2z}{z^2 - h^2\pi^2}$,

$$\lim_{m=\infty}\left(\cot z - \frac{1}{z} - \sum_{h=1,\ldots,m} \frac{2z}{z^2 - h^2\pi^2}\right) = 0.$$

On en déduit le développement

$$\cot z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \ldots + \frac{2z}{z^2 - m^2\pi^2} + \ldots.$$

XI. — Séries entières à plusieurs variables.

279. On appelle *série entière à plusieurs variables* (trois, par exemple, x, y, z) une série de la forme

$$(1) \qquad \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

les coefficients A et les variables x, y, z étant des nombres complexes.

Si l'on connaît un système de trois nombres positifs R, R', R'' tels que la série

$$(2) \qquad \Sigma |A_{\alpha,\beta,\gamma}| R^\alpha R'^\beta R''^\gamma$$

soit convergente, on reconnaît que, pour tout système de valeurs x, y, z des variables telles que

$$(3) \qquad |x| \leq R, \qquad |y| \leq R', \qquad |z| \leq R'',$$

la série (1) a ses termes au plus égaux en module à ceux de la série numérique convergente (2). Donc la série (1) est normalement convergente dans le système de cercles définis par les équations (3), et représente une fonction holomorphe de x, y, z quand x, y, z sont dans ces cercles. Par application des théorèmes généraux, cette fonction est dérivable terme à terme indéfiniment, en chaque point x, y, z, tel que $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$ (n° 238, p. 36).

De même, si l'on a une série de la forme

$$(4) \qquad \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma,$$

et si l'on connaît des nombres R, R', R'' tels que la série (2) soit convergente, on en déduit que la série (3) représente une fonction holomorphe de x, y, z, lorsque x, y, z sont, dans leurs plans respectifs, à l'intérieur des cercles de centres x_0, y_0, z_0 et de rayons R, R', R''.

280. Réciproquement, soit une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables complexes, holomorphe par rapport à ces variables lorsque x, y, z font partie de certains cercles de centres x_0, y_0, z_0 dans leurs plans respectifs. Faisons d'abord un changement de variables de façon à prendre pour origine dans chaque plan les points x_0, y_0, z_0. Nous aurons alors à considérer, dans les plans x, y, z, des cercles C, C', C'' dont chacun a son centre à l'origine, et de rayons R, R', R''.

Soient x, y, z des valeurs des variables respectivement intérieures à ces cercles, et soit t une nouvelle variable. Si t reste inférieur en module aux quantités

$$\frac{R}{|x|}, \quad \frac{R'}{|y|}, \quad \frac{R''}{|z|}$$

(chacune de ces quantités devant être remplacée par $+\infty$ si son dénominateur est nul), les points tx, ty, tz sont respectivement à l'intérieur des cercles C, C', C''. Donc la fonction

$$\varphi(t) = f(tx, ty, tz)$$

est holomorphe de t dans le cercle $|t| < \rho$, si ρ est le plus petit des trois nombres $\frac{R}{|x|}$, $\frac{R'}{|y|}$, $\frac{R''}{|z|}$. Ces trois nombres étant supérieurs à 1, le point $t = 1$ est à l'intérieur de ce dernier cercle; par conséquent, la fonction $\varphi(t)$ est développable en série de Taylor pour la valeur $t = 1$, et l'on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \ldots.$$

Calculons les dérivées successives de $\varphi(t)$; on a

$$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z\frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz),$$

....

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}_{tx, ty, tz},$$

d'où

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}_{0,0,0},$$

ou, en développant la puissance symbolique,

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{0,0,0} x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons des entiers positifs ou nuls α, β, γ telles que $\alpha + \beta + \gamma = n$.

En portant cette valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ dans le développement de $\varphi(1)$, et revenant à la fonction f, on obtient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \ldots \\ \qquad + \sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma=n} \dfrac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{0,0,0} x^\alpha y^\beta z^\gamma + \ldots. \end{cases}$$

281. Dans la série (1), tous les termes en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ pour lesquels la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est la même sont réunis en un seul. *Je dis, en outre, que l'on peut séparer les différents termes en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ et les placer dans un ordre quelconque.* Il suffit pour cela de vérifier que la série ainsi obtenue, que nous désignerons par

$$(2)\quad \sum \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0, 0, 0)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\,\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \qquad (\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0),$$

est absolument convergente quels que soient x, y, z, pris à l'intérieur de C, C', C''.

Pour faire cette vérification, nous allons d'abord calculer une limite supérieure du module des dérivées de f. Soit M une borne

supérieure de $|f|$ dans C, C', C''. Considérons une dérivée de la forme $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$. Supposons que y et z aient reçu des valeurs fixes ; on a

$$\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right)_{x=0} = \frac{\alpha!}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(x, y, z)\,dx}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme on a d'autre part

$$\left|\int_{C}\frac{f(x, y, z)\,dx}{x^{\alpha+1}}\right| \leq 2\pi R\,\frac{M}{R^{\alpha+1}},$$

il en résulte

$$\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right|_{x=0} \leq \frac{M\,\alpha!}{R^\alpha}.$$

Cela étant, fixons z, et considérons la dérivée $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right)_{x=0,\,y=0}$. On a

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right)_{x=0,\,y=0} = \frac{\beta!}{2i\pi}\int_{C'}\frac{\dfrac{\partial^\alpha f(0, y, z)}{\partial x^\alpha}}{y^{\beta+1}}\,dy,$$

et l'on en déduit de la même façon

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right|_{x=0,\,y=0} \leq \frac{M\,\alpha!\,\beta!}{R^\alpha R'^\beta}.$$

On a enfin

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{x=0,\,y=0,\,z=0} = \frac{\gamma!}{2i\pi}\int_{C''}\frac{\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f(0, 0, z)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}}{z^{\gamma+1}}\,dz,$$

d'où

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0, 0, 0)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right| \leq M\,\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{R^\alpha R'^\beta R''^\gamma}.$$

Cela posé, considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R'}\right)\left(1-\dfrac{z}{R''}\right)}.$$

En supposant $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$, on a

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{R}} = 1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} + \ldots + \frac{x^\alpha}{R^\alpha} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{y}{R'}} = 1 + \frac{y}{R'} + \frac{y^2}{R'^2} + \ldots + \frac{y^\beta}{R'^\beta} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{z}{R''}} = 1 + \frac{z}{R''} + \frac{z^2}{R''^2} + \ldots + \frac{z^\gamma}{R''^\gamma} + \ldots,$$

Par multiplication des deux premières séries, qui sont absolument convergentes, on voit que la fonction $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R'}\right)}$ a pour développement la série $\sum \dfrac{x^\alpha y^\beta}{R^\alpha R'^\beta}$; puis, en multipliant par la troisième, on reconnaît que φ est représentable par la série $\sum \dfrac{M x^\alpha y^\beta z^\gamma}{R^\alpha R'^\beta R''^\gamma}$, les termes de cette série étant écrits dans un ordre quelconque et le développement étant valable dès que l'on a $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$.

En comparant le coefficient du terme général de cette série en x, y, z avec la borne supérieure obtenue pour le module de la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0, 0, 0)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$, on voit que dans le développement (1) de $f(x, y, z)$, le terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ a un coefficient moindre en module que le coefficient correspondant dans le développement de φ.

Comme le développement de φ forme une série convergente, on en conclut que la série (2), obtenue en écrivant les termes de (1) dans un ordre quelconque, est absolument convergente, ce qui établit la proposition.

282. En revenant au cas général où les cercles d'holomorphie C, C', C'' ont pour centres des points x_0, y_0, z_0, on a, pour $f(x, y, z)$, le développement suivant :

$$(4)\quad f(x, y, z) = \sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_{x_0, y_0, z_0} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma,$$

α, β, γ prenant tous les systèmes de valeurs entières positives ou nulles.

Le développement est unique, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir pour une même fonction deux développements différents.

En effet, soit

$$(5)\qquad f = \sum A_{\alpha,\beta,\gamma}(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma$$

un autre développement. D'après le n° 279, p. 77, la série (5) est dérivable terme à terme. Si l'on prend α fois la dérivée par rapport à x, β fois la dérivée par rapport à y, γ fois la dérivée par rapport à z, et si l'on fait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on obtient l'égalité

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_{x_0, y_0, z_0}.$$

Donc le second développement est identique au premier.

On dit qu'une fonction $f(x, y, z)$ est *régulière* pour le système de valeurs x_0, y_0, z_0 si elle est holomorphe quand x, y, z sont respectivement à l'intérieur de certains cercles de centres x_0, y_0, z_0. En tout point régulier d'une fonction, les résultats précédents sont applicables.

283. *Opérations sur les séries entières.* — Il arrive souvent que l'on peut, par application des théorèmes généraux, montrer qu'une fonction définie d'une certaine manière est holomorphe. Il en résulte, d'après ce qui précède, qu'elle est développable en série entière; si l'on peut d'une façon quelconque former cette série, on sera d'avance assuré de sa convergence. On peut, en particulier, pour calculer ses coefficients, employer la méthode des coefficients indéterminés.

Soit, par exemple, une fonction holomorphe

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots$$

dont le développement est valable dans un certain cercle. Les fonctions y^2, y^3, ... sont fonctions holomorphes de x dans le même cercle. Chacune d'elles est donc représentable par une série entière. On obtiendra y^2 par la multiplication des séries

$$y^2 = (a_0 + a_1 x + \ldots)(a_0 + a_1 x + \ldots),$$

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + \ldots.$$

On peut trouver de même les développements de y^3, ...

Remarquons que le coefficient de x^p dans le développement d'une puissance quelconque de y dépend seulement de $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Un calcul analogue permet d'avoir l'expression du produit yz, y et z étant deux fonctions holomorphes de x données par leurs développements en séries entières.

On peut de même calculer le quotient de deux fonctions holomorphes et l'obtenir sous forme de série entière. Soient f et φ deux fonctions holomorphes dans certains cercles de centre O, φ ayant pour $x = 0$ une valeur différente de o. Soient

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots, \qquad \varphi = b_0 + b_1 x + \ldots \qquad (b_0 \neq 0).$$

Considérons le quotient

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots}{b_0 + b_1 x + \ldots}.$$

Soit C un cercle d'holomorphie commun aux deux fonctions. Puisque

$b_0 \neq 0$, il y a un cercle C' de centre O, contenu dans C, à l'intérieur duquel φ est différent de o. Dans le cercle C', le quotient $\frac{f}{\varphi}$ est holomorphe.

En posant

$$\frac{f}{\varphi} = c_0 + c_1 x + \ldots,$$

nous devons avoir l'identité

$$a_0 + a_1 x + \ldots = (b_0 + b_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots),$$

d'où

$$a_0 = b_0 c_0,$$
$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0,$$
$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b_0 étant différent de o, la première relation fournit c_0, la seconde c_1, la troisième c_2, et ainsi de suite. On a ainsi tous les coefficients de proche en proche.

On procéderait d'une manière identique s'il s'agissait de séries entières à plusieurs variables.

284. *Substitution d'une série entière dans d'autres séries entières.* — Soit

$$u = f(y, z, \ldots)$$

une fonction holomorphe des variables y, z, ..., qui sont elles-mêmes fonctions holomorphes de la variable complexe x. Considérons les développements en séries entières de ces différentes fonctions :

$$u = \mathrm{A} + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}y^2 + \mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2 + \ldots, \tag{1}$$

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots, \tag{2}$$

$$z = a' + b'x + c'x^2 + \ldots. \tag{3}$$

Supposons que les points $y = a$, $z = a'$ soient intérieurs aux cercles d'holomorphie relatifs à la fonction f. Dans ces conditions, on peut trouver des cercles γ, γ' de centres respectifs a, a', contenus respectivement dans les cercles d'holomorphie relatifs à f. Quand x reste dans un certain cercle Γ de centre O dans son plan, y et z restent dans γ et γ'; u est alors fonction holomorphe de x. Soit

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots \tag{4}$$

son développement. Le terme constant α est la valeur de u pour $x = 0$. On a donc

$$\alpha = A + Ba + Ca' + Da^2 + \ldots.$$

Supposons qu'on remplace dans (1) y et z par leurs développements et qu'on calcule dans le nouveau développement obtenu le coefficient de x, ce coefficient sera égal à β, par identification avec (4). On peut ainsi, par identifications successives, obtenir tous les coefficients de (4). On reconnaît que l'on peut écrire (4) sous forme d'une série double, de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} A + Ba \;\;\, + Ca' \;\;\, + \ldots \\ \quad + Bbx + Cb'x + \ldots \\ \quad + Bcx^2 + Cc'x^2 + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En résumé, on voit que l'on peut effectuer la substitution de y et z par les séries qui les représentent, le nouveau développement obtenu étant valable dans un certain cercle Γ du plan des x.

285. *Fonctions implicites.* — Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction holomorphe de x, y dans certains cercles ayant pour centres les origines de leurs plans respectifs. On suppose, en outre, que l'on a

$$f(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0.$$

Dans ces conditions, il existe (n° **216**, p. 11) pour y une fonction déterminée de x, holomorphe par rapport à x dans un certain domaine entourant l'origine du plan des x et satisfaisant à $f = 0$. Cette fonction holomorphe est représentable dans un certain domaine par une série entière. D'ailleurs, f est aussi représentable par une série entière, que nous pouvons considérer comme connue. Soit donc

$$f = Ax + By + Cx^2 + 2Dxy + Ey^2 + \ldots \qquad (B \neq 0),$$
$$y = ax + bx^2 + \ldots.$$

Remplaçons y par son développement dans f et écrivons que la fonction de x obtenue est identiquement nulle. On obtient les rela-

tions

$$A + Ba = 0, \qquad Bb + C - 2Da - Ea^2 = 0, \qquad \ldots.$$

B étant différent de o, la première détermine a, la seconde détermine b, et ainsi de suite de proche en proche.

Dans tous ces exemples, on voit que les coefficients inconnus se déterminent chacun par une équation linéaire. Par suite, si les coefficients des fonctions données sont tous réels, il en est de même pour les coefficients obtenus.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Existence des solutions des systèmes différentiels.

286. On sait qu'on appelle *équation différentielle* une équation entre une variable, une fonction inconnue de cette variable et les dérivées de cette fonction jusqu'à un certain ordre. Dans l'étude des équations différentielles, il y a lieu de se placer à deux points de vue différents, suivant que les variables que l'on considère sont réelles ou complexes. Mais il est important de remarquer que les fonctions de variables réelles qu'on a le plus souvent occasion de rencontrer, étant représentables par des séries entières, rentrent dans la catégorie des fonctions analytiques. On conçoit donc que, même s'il s'agit de variables réelles, il peut y avoir avantage à se placer au point de vue des variables complexes.

Si l'on a plusieurs équations entre plusieurs fonctions inconnues $y, z, \ldots$ d'une variable x et des dérivées de divers ordres de ces fonctions, on dit que l'on a un *système d'équations différentielles* ou un *système différentiel*. On peut toujours remplacer un tel système par un autre système où n'entrent que les dérivées premières des fonctions inconnues. En effet, si y par exemple entre par ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, on introduit les fonctions auxiliaires suivantes :

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = \frac{dy_{n-2}}{dx},$$

et l'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-2}}{dx}, \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dy_{n-1}}{dx}.$$

Il suffit de remplacer $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ par ces valeurs dans les équa-

tions proposées pour avoir un nouveau système renfermant $n-1$ équations et $n-1$ inconnues en plus, mais dans lequel les seules dérivées des fonctions $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ qui interviennent sont les dérivées premières.

287. Cela posé, considérons un système de n équations différentielles de la forme suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right.$$

Nous allons démontrer que, *si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des variables complexes $x, y_1, \ldots, y_n$ sont régulières au point $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$, il existe pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de fonctions holomorphes de x dans un certain cercle de centre a, satisfaisant aux équations* (1) *et prenant respectivement les valeurs $b_1, \ldots, b_n$ lorsque x prend la valeur a.*

Pour simplifier l'écriture, faisons d'abord un changement de variables $x = a + X$, $y_1 = b_1 + Y_1, \ldots$ qui ramène le système a, $b_1, \ldots, b_n$ au système $0, 0, \ldots, 0$; il s'agit alors de trouver pour $y_1, \ldots, y_n$ des fonctions holomorphes de x satisfaisant aux équations (1) et s'annulant en même temps que x. De telles fonctions, si elles existent, sont représentables par des séries entières de la forme suivante :

$$(2)\qquad y_i = \alpha_i x + \beta_i x^2 + \gamma_i x^3 + \ldots.$$

En remplaçant dans les équations (1) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par ces séries, les deux membres de chaque équation doivent être des séries identiques. Les fonctions f_i sont régulières au point $0, 0, \ldots, 0$; soit, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$f_i = A_i + B_i x + C_i y_1 + D_i y_2 + \ldots + E_i x^2 + \ldots;$$

on doit avoir (n° 284, p. 82)

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= \alpha_i + 2\beta_i x + \ldots \\ &= A_i + B_i x + C_i(\alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \ldots) + D_i(\alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \ldots) + \ldots. \end{aligned}$$

En égalant les termes constants dans les deux membres, on a la valeur de α_i; en égalant les coefficients de x, on a dans le premier membre β_i, dans le second une quantité qui est connue dès que les α sont connus; on en déduit β_i.

D'une manière générale, dans le second membre, le coefficient de x^p dépend des coefficients des f_i et des coefficients α, β, γ, ... relatifs à x, x^2, ..., x^p dans les développements des y; en l'égalant au coefficient de x^p dans le premier membre, qui dépend de la valeur du coefficient de x^{p+1} dans y_i, on aura ce dernier coefficient; on peut donc avoir de proche en proche tous les coefficients des séries y_i. On exprime ce résultat en disant qu'*on peut trouver, pour les y_i, des séries entières* (2) *satisfaisant formellement aux équations* (1).

S'il y a un système de fonctions holomorphes, solutions de (1), ce système est nécessairement donné par les séries (2), et ces séries constituent effectivement un système de solutions de (1) si elles sont convergentes. Nous sommes donc ramenés à démontrer que les séries (2) sont convergentes dans un certain cercle.

288. Soit M une borne supérieure pour les modules des f_i quand x, y_1, ..., y_n restent dans leurs cercles de convergence respectifs, et soit ρ le rayon minimum de ces cercles. Considérons la fonction

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}$$

et le système auxiliaire

$$(4)\qquad \frac{dy_i}{dx} = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On sait que la fonction φ est développable en série entière par rapport à x, y_1, ..., y_n et que chacune des fonctions f_i, développée en série entière, a des termes au plus égaux en module aux termes correspondants du développement de φ (n° 281, p. 80).

Appliquons la méthode du numéro précédent au système d'équations (4). Les coefficients A_i, B_i, ... qui figurent dans f_i sont remplacés par des nombres positifs qui leur sont supérieurs ou égaux en module. Si l'on calcule, pour le système (4), les coefficients α, on obtient des valeurs positives au moins égales en module aux valeurs obtenues pour le système (1). Quant aux coefficients β, γ, ... que l'on calcule successivement, chacun d'eux est défini comme une certaine

combinaison linéaire à coefficients positifs portant d'une part sur les quantités A_i, B_i, ... qui figurent dans f_i, d'autre part sur les coefficients α, β, ... déjà obtenus. Il résulte de là que les coefficients β pour le système (4) sont des nombres positifs, supérieurs ou égaux en module aux coefficients β pour le système (1); de même pour les coefficients γ, ... On voit finalement que la méthode de détermination des coefficients, appliquée à (4), donne pour y_1, ..., y_n des séries entières (S) à coefficients positifs, au moins égaux aux modules des coefficients correspondants des séries (2). Par conséquent, si les séries (S) sont convergentes, les séries (2) le seront *a fortiori*.

Pour montrer que les séries (S) sont convergentes, il suffit de montrer directement qu'il existe pour (4) des intégrales holomorphes dans un certain cercle et s'annulant avec x. En effet, s'il existe de telles intégrales, elles sont représentables par des séries entières qui sont identiques aux séries (S) (n° 287).

Dans le système (4), les n équations ont des seconds membres identiques; les fonctions y_1, ..., y_n ont même dérivée et sont toutes égales à o pour $x = 0$; elles doivent donc être identiques à une même fonction Y. Nous sommes ramenés à intégrer la seule équation

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^n},$$

ou

$$M\frac{dx}{1-\frac{x}{\rho}} = \left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^n dY.$$

Supposons $|x| < \rho$; le premier membre est la différentielle de $-M\rho \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)$, en prenant la détermination du Log qui est nulle avec x; le second membre étant la différentielle de $-\frac{\rho}{n+1}\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^{n+1}$, l'équation intégrée est

$$-\frac{\rho}{n+1}\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^{n+1} = -M\rho \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right) + c,$$

c étant une constante; en faisant $x = Y = 0$, on obtient $c = -\frac{\rho}{n+1}$, et l'équation précédente devient

$$\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^{n+1} = 1 + (n+1) M \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right).$$

Quand x tend vers o, le second membre de cette équation tend

vers 1. Il résulte de la théorie des équations binomes qu'il y a une racine $(n+1)^{\text{ième}}$ du second membre qui tend vers 1 quand x tend vers 0; désignons cette racine par $\sqrt[n+1]{\quad}$, nous aurons

$$Y = \rho\left[1 - \sqrt[n+1]{1 - (n+1)\,M\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)}\right].$$

Cette fonction est bien holomorphe dans un certain cercle de centre O, c'est-à-dire que (4) a un système d'intégrales holomorphes représentables par des séries entières. La convergence des séries relatives au système (1) en résulte.

Donc le système (1) admet une solution dans les conditions indiquées.

289. Remarquons que, dans le cas particulièrement important où les coefficients des f_i sont *réels*, l'application de la méthode conduit à des coefficients à valeur réelle; les séries (2) sont des séries entières à coefficients réels.

II. — Équations différentielles du premier ordre.

290. Une équation différentielle du premier ordre, résolue par rapport à la dérivée, est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Par application du théorème précédent, si la fonction f des deux variables x, y est régulière en un point (x_0, y_0), il existe pour y une fonction holomorphe de x dans un certain cercle de centre x_0, satisfaisant à l'équation donnée et prenant, pour $x = x_0$, la valeur y_0. On reconnaît ainsi que la solution générale obtenue par ce procédé renferme une constante arbitraire, savoir la valeur de la fonction correspondant à une valeur donnée de la variable.

Rappelons que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

est

$$y = \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

L'opération qui consiste à déduire de (2) l'équation (3) est dite une *quadrature*.

291. Il y a souvent avantage à donner à une équation différentielle, au lieu de la forme (1), la forme plus symétrique

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \tag{4}$$

X et Y pouvant être fonctions de x, y. On ne spécifie pas ainsi quelle est la variable indépendante. On peut choisir comme variable indépendante soit x, soit y, ou bien chercher à exprimer x et y en fonction d'une troisième variable indépendante, ou encore chercher à établir entre x, y une relation $\varphi(x, y) = 0$, telle que, lorsque x, y sont liés par cette relation, l'équation différentielle proposée soit vérifiée.

Dans le cas où X dépend seulement de x et Y de y, le premier membre de l'équation (4) est la différentielle exacte de l'expression

$$\int X\,dx + \int Y\,dy,$$

et, comme cette différentielle est nulle, c'est que l'on a

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = c,$$

c étant une constante arbitraire. On obtient ainsi une relation entre x, y dépendant d'une constante arbitraire et qui constitue la solution générale de l'équation différentielle donnée. On dit, dans ce cas, que dans l'équation donnée les *variables sont separées;* une telle équation s'intègre par quadratures.

292. Étant donnée une équation différentielle

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

proposons-nous d'obtenir une fonction $\mu(x, y)$, appelée *facteur intégrant,* telle que l'expression

$$\mu(x, y)(X\,dx + Y\,dy)$$

soit la différentielle d'une certaine fonction $\varphi(x, y)$.

Si nous supposons le problème résolu, la solution générale de l'équation différentielle sera constituée par la relation

$$\varphi(x, y) = c.$$

Pour que $\mu X\,dx + \mu Y\,dy$ soit la différentielle totale de φ, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$X\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial X}{\partial y} = Y\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On a ainsi, pour déterminer μ, une équation aux dérivées partielles. Sauf dans les cas où l'on aperçoit immédiatement un facteur intégrant, sa recherche conduit en général à un problème plus difficile que le problème de l'intégration de l'équation proposée.

293. Indiquons quelques types d'équations du premier ordre que l'on peut intégrer.

Équations homogènes. — On appelle *équation homogène* une équation qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$y = ux.$$

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u),$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}.$$

On voit que l'on arrive à une équation différentielle où les variables sont séparées. On peut intégrer cette équation par quadratures, puis revenir aux variables primitives x et y.

Toute équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

dans laquelle f est le quotient de deux polynomes homogènes et de même degré par rapport à x, y, rentre dans ce cas. On voit de plus que l'on sera ramené à des intégrations de fractions rationnelles.

On peut aussi ramener à ce cas les équations de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

En effet, posons

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta,$$

α et β étant des constantes actuellement indéterminées. $\dfrac{dy}{dx}$ se transforme en $\dfrac{dY}{dX}$, en même temps que l'on a

$$ax + by + c = aX + bY + a\alpha + b\beta + c,$$
$$a'x + b'y + c' = a'X + b'Y + a'\alpha + b'\beta + c'.$$

Déterminons α et β de manière que

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \qquad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Il est possible de le faire si $ab' - ba' \neq 0$, et l'on a alors

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right),$$

équation qui est homogène.

Si $ab' - ba' = 0$, en posant

$$u = ax + by + c,$$

on a, λ et μ étant certaines constantes,

$$a'x + b'y + c' = \lambda u + \mu,$$

de sorte que le second membre de l'équation donnée est une fonction de u. On a d'ailleurs

$$du = a\,dx + b\,dy,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b},$$

de sorte que l'équation donnée est de la forme

$$\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

294. *Équations linéaires.* — On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x) = 0,$$

P et Q étant des fonctions données de x.

On dit que l'équation est *linéaire et homogène* si Q est nul, c'est-

à-dire si l'équation est de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \tag{2}$$

Intégrons cette équation (2), qu'on appelle encore *équation sans second membre*. On peut séparer les variables en l'écrivant

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0,$$

d'où, en remarquant que $\frac{1}{y}$, $P(x)$ sont les dérivées logarithmiques de y et $e^{\int P dx}$,

$$y e^{\int P(x)\,dx} = \text{const.}$$

La solution générale de l'équation (2) est donc

$$y = c e^{-\int P dx}.$$

On voit qu'elle renferme en facteur une constante arbitraire. Deux solutions différentes de l'équation (2) sont donc dans un rapport constant.

295. Considérons maintenant l'équation (1). Pour l'intégrer, désignons par u une solution de l'équation sans second membre (2); cherchons à vérifier (1) par une fonction y de la forme

$$y = uz,$$

u satisfaisant, comme il vient d'être dit, à l'équation

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0. \tag{3}$$

En remplaçant y par uz dans l'équation (1), on obtient

$$z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} + P(x)\,u\,z + Q(x) = 0,$$

ou, en tenant compte de (3),

$$u\frac{dz}{dx} + Q(x) = 0,$$

équation en $\frac{dz}{dx}$ qui fournit z par une quadrature :

$$z = -\int \frac{Q(x)}{u(x)}\,dx + c.$$

On peut prendre pour $u(x)$ la fonction $e^{\int P\,dx}$, et l'on a

$$z = -\int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx + c$$

et, par suite,

$$y = -e^{-\int P\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx + c\right].$$

La solution générale se présente donc sous la forme

$$y = u(z_0 + c) = y_0 + uc,$$

u étant l'une des solutions de l'équation sans second membre, z_0 l'une des intégrales de l'équation en z, y_0 l'une des solutions de (1). Par conséquent, *la constante arbitraire entre linéairement dans la solution générale.*

296. *Équation de Bernoulli.* — On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^n = 0,$$

P et Q étant des fonctions données de x. Si $n = 0$, on a l'équation linéaire; si $n = 1$, on a l'équation linéaire homogène. Supposons n différent de 0 et de 1, et divisons les deux membres de l'équation par y^n. Il vient

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y^n} + \frac{P}{y^{n-1}} + Q = 0.$$

Prenons comme nouvelle fonction inconnue $u = \frac{1}{y^{n-1}}$; k étant un certain facteur numérique, on a

$$du = \frac{1}{k}\frac{dy}{y^n},$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit

$$k\frac{du}{dx} + Pu + Q = 0.$$

On obtient ainsi pour déterminer u une équation linéaire avec second membre; u étant connu, on en déduit y.

297. *Équation de Riccati.* — On appelle *équation de Riccati*

une équation de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + P_1(x)y + P_2(x) = 0,$$

P, P_1, P_2 étant des fonctions données de x.

En général, on ne sait pas intégrer cette équation. Mais, si l'on en connaît une solution particulière y_1, on peut trouver la solution générale. Posons

$$y = y_1 + z$$

L'équation donnée se transforme en

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + P(x)(y_1 + z)^2 + P_1(x)(y_1 + z) + P_2(x) = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que y_1 est une solution particulière,

$$\frac{dz}{dx} + z[2P(x)y_1 + P_1(x)] + z^2 P(x) = 0.$$

On voit que z doit satisfaire à une équation de Bernoulli, que nous savons intégrer. On pose $u = \frac{1}{z}$; u est donné par une équation linéaire.

Soit u_0 une solution particulière de cette équation linéaire ; u est de la forme $u = u_0 + cv$, v étant une certaine fonction. On a

$$z = \frac{1}{u_0 + cv},$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u_0 + cv} = \frac{\alpha + c\beta}{\gamma + c\delta},$$

α, β, γ, δ étant certaines fonctions déterminées. *La solution générale de l'équation de Riccati est donc, par rapport à la constante arbitraire, une fraction du premier degré.* Soient alors y_1, y_2, y_3, y_4 quatre solutions différentes de l'équation de Riccati ; elles sont comprises dans la formule générale et correspondent respectivement aux valeurs c_1, c_2, c_3, c_4 de la constante c. D'après la propriété connue des fractions du premier degré, pour une valeur donnée de x, le rapport anharmonique de ces quatre fonctions est égal au rapport anharmonique des quatre constantes correspondantes :

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Le rapport anharmonique de quatre solutions données de l'équation de Riccati reste donc constant quand x varie.

298. Étant donnée une équation différentielle entre x et y, si l'on peut opérer sur x, y un changement de variables qui transforme l'équation en une équation rentrant dans un des types précédents, on en déduit la solution générale de l'équation donnée.

299. Les équations que nous avons étudiées étaient toutes résolues par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Considérons maintenant une équation mise sous la forme

$$F(x, y, y') = 0.$$

On peut chercher à résoudre cette équation par rapport à y' de façon à être ramené au cas précédent. Toutefois, il existe certains cas où l'on peut se dispenser d'effectuer cette résolution et intégrer directement l'équation non résolue. Donnons-en un exemple.

Équation de Lagrange. — On appelle *équation de Lagrange* une équation de la forme suivante :

$$(1) \qquad y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

φ et ψ étant des fonctions données. On voit qu'une équation de Lagrange est une *équation linéaire par rapport à x et y.*

Dérivons les deux membres de cette équation, x étant variable indépendante. On obtient

$$(2) \qquad y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + \psi'(y')y''.$$

Dans cette équation, prenons y' comme fonction inconnue et posons $y' = p$. L'équation s'écrit

$$(3) \qquad p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}[x\varphi'(p) + \psi'(p)].$$

Sous cette forme, c'est une équation différentielle entre p et x, résolue par rapport à $\frac{dp}{dx}$. Elle peut se mettre sous la forme d'une équation linéaire par rapport à x et $\frac{dx}{dp}$, en l'écrivant

$$(4) \qquad \frac{dx}{dp}[p - \varphi(p)] = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

de sorte que, si l'on considère x comme fonction inconnue de p, on peut intégrer cette équation. On obtient ainsi x en fonction de p. Si

l'on peut de cette relation tirer p en fonction de x, en portant la valeur de p dans l'équation

$$(5)\qquad y = x + \tfrac{2}{3}p^2 - \tfrac{4}{9}p^3,$$

on aura, pour l'équation donnée, la solution générale y en fonction de x.

On peut aussi conserver l'expression de x en fonction de p et porter cette valeur dans l'expression (5) de y. On aura ainsi y en fonction de p. En résumé, on voit que l'on exprime x et y en fonction d'un paramètre p, $\frac{dy}{dx}$ étant égal à p et les différentielles de x et y dans ces conditions étant liées par la relation (1).

La méthode employée s'appelle la méthode d'*intégration par dérivation*.

309. Appliquons cette méthode à un exemple. Soit l'équation différentielle

$$4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0.$$

Posons $y' = p$ et dérivons cette équation :

$$12p^2\frac{dp}{dx} - 12p\frac{dp}{dx} + 9(p - 1) = 0,$$

ou

$$(p - 1)\left(4p\frac{dp}{dx} + 3\right).$$

L'équation obtenue est vérifiée de deux manières : une première solution est $p = 1$, une seconde solution est celle qui donne lieu à l'équation différentielle

$$4p\frac{dp}{dx} + 3 = 0.$$

Pour cette seconde solution, on a, en intégrant cette équation,

$$2p^2 + 3x = c;$$

d'où

$$x = \frac{c - 2p^2}{3}.$$

Portons cette valeur dans l'équation donnée, il vient

$$y = x - \frac{4p^3 - 6p^2}{9} = \frac{3c - 4p^3}{9}.$$

Nous avons ainsi une solution de l'équation donnée, constituée par les deux fonctions de p

$$x = \frac{c - 2p^2}{3}, \qquad y = \frac{3c - 4p^3}{9}.$$

En langage géométrique, on obtient une certaine famille de courbes unicursales dépendant d'une constante arbitraire, le paramètre p en fonction duquel varient les coordonnées d'un point de la courbe étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.

Considérons maintenant l'autre solution. De $p = 1$ résulte

$$y = x + c.$$

Pour qu'une fonction de cette forme vérifie l'équation donnée, il faut que l'on ait

$$4 - 6 + 9c = 0;$$

d'où

$$c = \frac{2}{9}.$$

La fonction $y = x + \frac{2}{9}$ est une intégrale de l'équation donnée. Nous trouvons ainsi pour cette équation deux espèces de solutions différentes : l'une renfermant une constante arbitraire, l'autre entièrement déterminée et ne rentrant pas dans la famille précédente.

301. Un cas particulier de l'équation de Lagrange est l'équation de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

On obtient ici, en appliquant la méthode précédente,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0.$$

Cette équation peut être vérifiée de deux manières différentes, suivant que l'on prend

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

ou

$$x + \psi'(p) = 0.$$

La seconde solution donne

$$x = -\psi'(p)$$

et, en portant cette valeur de x dans l'équation donnée,

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

On a ainsi des fonctions x et y de p qui satisfont à l'équation donnée et ne renferment pas de constante arbitraire.

En prenant la solution $\frac{dp}{dx} = 0$, on obtient

$$p = a,$$

d'où, en remplaçant dans l'équation donnée,

$$y = ax + \psi(a).$$

On obtient ainsi pour y une intégrale de l'équation donnée dépendant d'une constante arbitraire a. On dira, en langage géométrique, que l'on a une famille de droites satisfaisant à cette équation.

302. *Solutions singulières.* — En résumé, étant donnée une équation différentielle non résolue

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

on peut dans certains cas l'intégrer directement et il peut y avoir :

1° Une famille de solutions dépendant d'une constante, c'est-à-dire une famille de courbes dépendant d'un paramètre;

2° Des solutions non comprises dans cette famille et ne renfermant pas de constante arbitraire.

Supposons que F soit fonction analytique des trois variables x, y, y', et que, pour un système déterminé de valeurs x_0, y_0, y'_0 attribuées aux trois variables, considérées actuellement comme indépendantes, on ait

$$F(x_0, y_0, y'_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0. \tag{2}$$

D'après la théorie des fonctions implicites, nous pouvons, au voisinage du système de valeurs x_0, y_0, y'_0, résoudre l'équation (1) par rapport à y', c'est-à-dire trouver pour y' une fonction déterminée de x, y vérifiant l'équation (1) et prenant la valeur y'_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$. On est ainsi ramené au cas d'une équation différentielle résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Cette équation a une intégrale qui, pour $x = x_0$, se réduit à y_0. En résumé, on trouve pour y une fonction bien déterminée de x vérifiant l'équation (1), prenant pour x_0 la

valeur y_0 et dont la dérivée prend en même temps la valeur y'_0. Supposons maintenant que nous fassions varier x_0, y_0 dans un domaine avoisinant ce point. Les conditions (2) seront encore réalisées et y'_0, en tant que solution de la première équation (2), est fonction continue de x_0, y_0. On peut donc dire que, x_0 étant fixé, on obtient par le procédé indiqué une solution de l'équation (1) renfermant une constante arbitraire, à savoir y_0. Ainsi se trouve établi le fait suivant : *au voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 vérifiant (2), toute solution de (1) rentre dans une famille dépendant d'une constante arbitraire.*

Examinons maintenant le cas d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 vérifiant l'équation (1) et l'équation (3)

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0. \tag{3}$$

Éliminons y' entre (1) et (3), et soit

$$Q(x, y) = 0 \tag{4}$$

le résultat de l'élimination. Il peut arriver que cette équation définisse pour y une fonction de x satisfaisant à (1). Cette solution, qui est d'une nature différente des précédentes, sera dite une *solution singulière* de l'équation (1). Dans l'équation de Lagrange donnée comme exemple (p. 98), $y = x + \frac{2}{9}$ est une solution singulière. Dans l'équation de Clairaut, la solution

$$x = -\psi'(p), \qquad y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

est aussi une solution singulière.

303. Remarquons qu'en général il n'y a pas, pour une équation différentielle donnée, de solution singulière. En effet, si nous remplaçons l'équation donnée (1) par l'équation

$$F(x, y, y' - \alpha) = 0, \tag{5}$$

en opérant sur cette équation (5) comme sur l'équation (1), nous obtiendrons la même équation (4). Or, une fonction y de x satisfaisant à l'équation (4) donne, pour y', une fonction bien déterminée qui ne peut évidemment satisfaire à toutes les équations telles que (5). Cela n'aura lieu que par exception et pour des valeurs particulières de α.

304. Examinons maintenant le cas où l'équation (1) est obtenue par élimination d'un paramètre c entre des équations de la forme (*cf.* t. I, p. 130)

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, c) = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0. \end{cases}$$

A tout système de valeurs x_0, y_0, y'_0 satisfaisant à (1) on peut alors adjoindre une valeur c_0 du paramètre c, telle que le système x_0, y_0, y'_0, c_0 satisfasse aux équations (6). Cette valeur c_0, qui est déterminée quand x_0, y_0, y'_0 le sont, peut être considérée comme une fonction de x, de sorte qu'il y a, pour y et c, deux fonctions de x telles que, y' étant la dérivée de y, les équations (6) sont vérifiées par ces deux fonctions. Dans ces conditions, en dérivant par rapport à x la première des équations (6), on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} = 0,$$

ou, en tenant compte de la seconde équation (6),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} = 0.$$

Cette équation peut être vérifiée de deux manières. Si l'on a $\dfrac{dc}{dx} = 0$, on en déduit

$$c = \text{const.}$$

Les intégrales correspondantes de (1) sont des fonctions y dépendant d'une constante arbitraire ; on retrouve les familles de courbes dont on est parti pour obtenir F. Ce sont les solutions ordinaires de (1).

L'autre solution de l'équation précédente est $\dfrac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$. Cela montre que l'équation (1) est vérifiée aussi pour les systèmes de solutions vérifiant

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0.$$

En éliminant c entre ces deux équations, on obtient une certaine équation $\psi(x, y) = 0$ qui définit y en fonction de x. Cette fonction y de x est solution de (1).

D'ailleurs, F étant le résultat de l'élimination de c entre les équations (6), on peut poser

$$F(x, y, y') = \varphi(x, y, c).$$

à condition de considérer c comme la fonction définie par la seconde équation (6); d'où, en dérivant par rapport à y',

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y'}.$$

Donc tout système de valeurs qui annule $\frac{\partial \varphi}{\partial c}$ annule aussi $\frac{\partial F}{\partial y'}$; par suite, la solution y que nous venons d'obtenir et qui correspond à $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$ est la solution singulière de (1).

On voit, en résumé, que si l'équation (1) est obtenue par élimination de c entre deux équations telles que (6), cette équation a des solutions ordinaires et une solution singulière; les solutions ordinaires s'obtiennent en résolvant (1) par rapport à y' et intégrant l'équation obtenue; elles correspondent à la famille de courbes à un paramètre ayant pour équation $\varphi = 0$. La solution singulière correspond à $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$. En langage géométrique, elle est constituée par l'*enveloppe* de la famille de courbes ayant pour équation $\varphi = 0$.

D'ailleurs, il est évident *a priori* que, si une famille de courbes satisfait à une équation différentielle et a une enveloppe, cette enveloppe satisfait aussi à l'équation différentielle. En effet, une équation différentielle n'est autre qu'une relation entre les coordonnées d'un point d'une courbe et le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point. Or, en tout point commun à l'enveloppe et à l'enveloppée, les tangentes à ces deux courbes sont confondues.

III. — Équations différentielles d'ordre n.

305. Une équation différentielle d'ordre n, résolue par rapport à la dérivée d'ordre n, est de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right). \tag{1}$$

Pour étudier les conditions d'existence de ses intégrales, ramenons cette équation au système auxiliaire (n° 286, p. 85) :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \dots, \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \quad \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \tag{2}$$

(2) est un système de n équations différentielles du premier ordre

qui est équivalent à l'équation proposée. Soit $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ un système de valeurs tel que la fonction de $(n+1)$ variables $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ soit régulière pour le point $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Le théorème d'existence des intégrales est applicable au système (2), en prenant pour valeurs initiales de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ respectivement $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

On constate ainsi que l'on peut se donner comme constantes arbitraires les valeurs de la fonction et de ses $(n-1)$ premières dérivées pour une valeur donnée de x : la solution de l'équation (1) dépend donc de n constantes arbitraires.

Nous allons indiquer un certain nombre de cas où l'on peut abaisser l'ordre de l'équation ou la ramener à un type connu.

306. Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Elle s'intègre par n quadratures qui donnent successivement $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}$. Chaque quadrature introduit une constante additive qui, dans la quadrature suivante, se multiplie par x, de sorte qu'on trouve pour y une fonction déterminée de x, plus un polynome arbitraire d'ordre $n-1$.

307. *La fonction y n'entre dans l'équation que par ses dérivées à partir d'un certain ordre k.* — On prend comme nouvelle inconnue la dérivée d'ordre k ; on obtient ainsi une équation d'ordre $n-k$. En supposant cette équation intégrée, on est ramené au cas précédent. On obtient y par k quadratures successives.

308. *x n'entre pas explicitement dans l'équation différentielle.* — Celle-ci est alors de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Faisons un changement de variable en prenant y comme variable et x comme fonction inconnue de y. D'après la théorie du changement de variables, les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ s'expriment rationnellement

au moyen des nouvelles dérivées $x'_y, x''_{y^2}, \ldots$, de sorte que l'équation donnée se transforme en une nouvelle équation dans laquelle x n'entre que par ses dérivées à partir du premier ordre. En prenant x'_y comme nouvelle fonction inconnue, l'équation n'est plus que d'ordre $n-1$.

Pour faire le changement de variable, on peut procéder de la manière suivante. Posons

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et cherchons ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans le changement de variable. C'est la dérivée de p par rapport à x; si l'on remarque que l'on a, quelle que soit la fonction f,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}p,$$

on voit que l'on doit remplacer $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $\frac{dp}{dy}p$.

De même, $\frac{d^3y}{dx^3}$, qui est la dérivée par rapport à x de $\frac{d^2y}{dx^2}$, doit être remplacé par $\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p$, c'est-à-dire par $\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]p$, et ainsi de suite.

Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = y.$$

C'est une équation différentielle du second ordre par rapport à y, ne contenant pas explicitement la variable x. En prenant y comme variable indépendante et posant $\frac{dy}{dx} = p$, l'équation se transforme en la suivante :

$$\frac{p\dfrac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = y$$

ou

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = y\,dy,$$

équation du premier ordre dans laquelle les variables sont séparées.

On peut intégrer cette équation et en déduire une relation entre p et y. En portant dans

$$\frac{dy}{dx} = p$$

ou

$$dx = \frac{dy}{p},$$

on aura x par une quadrature.

309. *L'équation donnée est homogène par rapport à y et ses dérivées jusqu'à l'ordre n.*

Une telle équation est de la forme

$$f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0.$$

Posons

$$y = e^z$$

et prenons z comme nouvelle fonction inconnue. On a

$$y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'^2 + z''), \qquad \ldots.$$

D'une façon générale, on reconnaît que $y^{(k)}$ est égal à e^z multiplié par un polynome contenant les dérivées de z par rapport à x jusqu'à l'ordre k inclusivement, de sorte que les rapports $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}$ s'expriment par des polynomes en $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ et, par cette transformation, l'équation prend la forme

$$\varphi(z', z'', \ldots, z^{(n)}) = 0;$$

c'est une équation d'ordre n ne renfermant la fonction inconnue z que par ses dérivées à partir de l'ordre 1. En prenant z' comme fonction inconnue, l'équation n'est plus que d'ordre $n - 1$.

310. *L'équation donnée est homogène par rapport aux quantités $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$.*

Un exemple d'une telle équation est l'équation

$$\frac{dy}{dx} - f\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Le premier membre est homogène et de degré 0 par rapport aux quatre quantités x, y, dx, dy, car il ne change pas quand on multiplie x, y, dx, dy par λ.

D'une manière générale, la condition de l'énoncé étant réalisée, si l'on remplace x, y par λx, λy, le premier membre de l'équation sera multiplié par une certaine puissance de λ, soit λ^m.

Posons

$$y = ux,$$

et soit

$$\varphi(x, u, dx, du, \ldots) = 0$$

l'équation transformée. Quand on remplace x par λx, sans changer u, le premier membre de cette équation doit être multiplié par λ^m. Transformons l'équation $\varphi = 0$ en prenant x comme fonction de u, changement que nous avons étudié sur d'autres exemples. La nouvelle équation obtenue est telle que, si l'on multiplie la fonction inconnue x, et par suite toutes ses dérivées, par λ, sans changer la variable u, le premier membre de l'équation est multiplié par λ^m. Ce premier membre est donc une fonction homogène et de degré m de x et de ses dérivées par rapport à u. C'est le cas précédent.

311. Considérons une équation de la forme

$$y'' = f(y).$$

Multiplions les deux membres par $2y'$. On a

$$2y'y'' = 2f(y)y'.$$

Sous cette forme, le premier membre est la dérivée par rapport à x de y'^2. On a donc, en intégrant,

$$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C.$$

On est ramené à une équation du premier ordre

$$y'^2 = F(y).$$

Cette méthode peut s'appliquer, par exemple, à l'équation

$$y'' = y;$$

mais cette équation rentre aussi dans le type des équations linéaires, que nous allons étudier maintenant.

IV. — Équations différentielles linéaires.

312. On appelle *équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n* une équation de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0, \tag{1}$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant des fonctions données de x. En général, nous supposerons que ce sont des fonctions analytiques.

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n non homogène*, ou *avec second membre*, une équation de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = f(x), \tag{2}$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ et f étant des fonctions données de x, qu'on suppose en général analytiques. L'équation (2) comprend comme cas particulier l'équation (1).

L'équation (1) appartient aussi au type des équations homogènes par rapport à y et ses dérivées. En posant $y = e^z$, elle se transforme en une équation d'ordre $n-1$ en z'. Mais cette nouvelle équation n'est plus linéaire, de sorte que la transformation n'est pas, en général, avantageuse. Pour le montrer sur un exemple, prenons l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$y'' + Py' + Qy = 0.$$

En posant $y = e^z$, on a

$$y' = e^z z', \qquad y'' = e^z (z'^2 + z'').$$

L'équation devient, après avoir divisé par e^z,

$$z'' + z'^2 + Pz' + Q = 0$$

ou, en posant $z' = u$,

$$u' + u^2 + Pu + Q = 0;$$

on voit que u dépend d'une équation de Riccati.

313. Revenons au cas général et faisons quelques remarques concernant les équations linéaires.

Supposons qu'on connaisse une solution y_1 de l'équation (1). Posons

$$y = y_1 z.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + y_1 \frac{d^2 z}{dx^2}, \qquad \ldots.$$

Formons la combinaison

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y,$$

c'est-à-dire le premier membre de (1). On reconnaît que dans cette fonction le coefficient de z est nul, car c'est l'expression

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y_1.$$

Ainsi, l'équation transformée est linéaire et d'ordre $n - 1$ en $\frac{dz}{dx}$. On peut dire que la connaissance d'une solution particulière de (1) permet d'abaisser l'ordre d'une unité. Ce résultat a son analogue dans la théorie des équations algébriques.

314. A cause de la forme de (1), on voit que, si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sont solutions, la fonction $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k$, où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des constantes, est aussi solution. En effet, en remplaçant dans (1) y par cette fonction, on voit que les coefficients de c_1, $c_2, \ldots, c_k$ sont tous nuls.

Étant données k fonctions de x, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, on dit qu'elles sont *linéairement indépendantes* si aucune d'elles n'est égale à une combinaison linéaire et homogène des autres. Je dis que si, parmi les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$, l'une est fonction linéaire et homogène des autres, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_k \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_k}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{k-1} y_1}{dx^{k-1}} & \frac{d^{k-1} y_2}{dx^{k-1}} & \ldots & \frac{d^{k-1} y_k}{dx^{k-1}} \end{vmatrix}$$

est nul. En effet, supposons que y_k, par exemple, soit combinaison linéaire des autres fonctions. On a une relation de la forme

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1} - y_k = 0.$$

Par dérivation, cette relation entraîne les $k-1$ suivantes :

$$\lambda_1 \frac{dy_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \lambda_{k-1} \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{dy_k}{dx} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 \frac{d^{k-1}y_1}{dx^{k-1}} + \lambda_2 \frac{d^{k-1}y_2}{dx^{k-1}} + \ldots + \lambda_{k-1} \frac{d^{k-1}y_{k-1}}{dx^{k-1}} + \frac{d^{k-1}y_k}{dx^{k-1}} = 0.$$

Pour chaque valeur de x, on a k relations homogènes entre les k quantités non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, 1$. Donc, le déterminant des coefficients de ces k quantités, qui est D, est nul.

Il résulte de là que si, étant données k fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$, on a

$$D \neq 0,$$

il est impossible que l'une soit combinaison linéaire des autres; en d'autres termes, les k fonctions sont linéairement indépendantes.

315. Cela posé, nous allons montrer que, *si l'on connaît, pour l'équation différentielle homogène* (1), *un système de n solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linéairement indépendantes, on peut avoir la solution la plus générale de l'équation non homogène* (2) *par des quadratures.*

Puisque $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes, on a

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons chercher une solution y de l'équation (2) de la forme

$$(3) \qquad y = z_1 y_1 + z_2 y_2 + \ldots + z_n y_n,$$

les z étant des fonctions inconnues auxiliaires entre lesquelles nous établissons $n-1$ relations, savoir celles que l'on obtiendrait par dérivation de (3) si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ étaient des constantes; nous avons ainsi les relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = z_1 \frac{dy_1}{dx} + z_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + z_n \frac{dy_n}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + z_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + z_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \end{array} \right.$$

Nous avons $n+1$ fonctions inconnues y, z_1, ..., z_n qui doivent satisfaire aux $n+1$ équations (2), (3) et (4). Au moyen des équations (3), (4), formons la combinaison qui figure dans le premier membre de (2). Pour cela, multiplions l'équation (3) par P_n, la première des équations (4) par P_{n-1}, la seconde par P_{n-2}, la dernière par P_1 et ajoutons membre à membre. Le premier membre de la relation obtenue est égal, en tenant compte de (2), à $f(x) - \frac{d^n y}{dx^n}$. Dans le second membre, le coefficient de z_i, en tenant compte de ce que y_i est solution de (1), est $-\frac{d^n y_i}{dx^n}$. Donc on a

$$f(x) = \frac{d^n y}{dx^n} - \left(z_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + z_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + z_n \frac{d^n y_n}{dx^n}\right). \tag{5}$$

Dérivons chacune des n équations (3) et (4), en tenant compte pour chaque équation de l'équation suivante et, pour la dernière équation (4), de l'équation (5). Nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= z'_1 y_1 + z'_2 y_2 + \ldots + z'_n y_n, \\ 0 &= z'_1 \frac{dy_1}{dx} + z'_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + z'_n \frac{dy_n}{dx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= z'_1 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + z'_2 \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} + \ldots + z'_n \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}, \\ f(x) &= z'_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + z'_2 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + z'_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ce système (6) est un système de n équations linéaires par rapport à z'_1, z'_2, ..., z'_n.

Le déterminant des coefficients de ces inconnues est le déterminant D qui est différent de o, par hypothèse. Ces équations peuvent donc être résolues par rapport aux z'_i et donnent pour ces quantités un système de fonctions bien déterminées. De chacune de ces fonctions z'_i on déduit la fonction z_i correspondante par une quadrature. La solution la plus générale de (2) est alors fournie par la relation (3).

Cette méthode est dite la méthode de *variation des constantes*.

Tout système de solutions y_1, y_2, ..., y_n formé de fonctions indépendantes est dit un *système fondamental d'intégrales* de l'équation (1).

316. Considérons le cas particulier de l'équation homogène (1). Pour avoir les fonctions z'_i correspondantes, faisons $f(x) = 0$ dans (6).

Ce système devient un système d'équations linéaires et homogènes dont le déterminant D est différent de o et qui, par suite, n'admet que la solution

$$z'_1 = z'_2 = \ldots = z'_n = 0.$$

Les fonctions z_1, z_2, ..., z_n se réduisent dans ce cas à des constantes. On a donc le résultat suivant relatif à l'équation linéaire et homogène : $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *étant n solutions particulières de l'équation* (1), *constituant des fonctions indépendantes, la solution générale de l'équation* (1) *est donnée par la combinaison linéaire la plus générale des fonctions* $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Proposons-nous de trouver une intégrale y de (1) qui, pour la valeur x_0 de la variable, prenne une valeur donnée y_0, les dérivées de y jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement prenant également des valeurs données $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$.

La solution cherchée est de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

On a, en dérivant $n-1$ fois,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = c_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}.$$

Donnons à x la valeur x_0 : soient $(y_1)_0$, ..., $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0$, ..., $\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)_0$, ... les valeurs que prennent alors y_1, ..., $\frac{dy_1}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$, ... On a les n relations

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_1(y_1)_0 + \ldots + c_n(y_n)_0,\\
y'_0 &= c_1\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + \ldots + c_n\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_0^{n-1} &= c_1\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)_0 + \ldots + c_n\left(\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)_0.
\end{aligned}$$

C'est un système de n équations linéaires à n inconnues c_1, c_2, ..., c_n. Le déterminant des coefficients de ces inconnues est le déterminant D, pris pour la valeur x_0. Donc, en tout point x_0 pour lequel

$D \neq 0$, on peut trouver une intégrale de (1) qui prenne en ce point une valeur donnée, ses $n-1$ premières dérivées prenant aussi des valeurs données.

317. Remarquons qu'une équation linéaire et homogène conserve la même forme si l'on change de variable indépendante. Soit, en effet, le changement de variable défini par

$$x = f(t).$$

On reconnaît (*cf.* t. I, p. 124) que chaque dérivée de y par rapport à t s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées de y par rapport à x. Inversement, on peut exprimer les anciennes dérivées par des combinaisons linéaires et homogènes des nouvelles. Le premier membre de (1) se transforme donc par ce changement de variable en une expression de même forme par rapport à $\frac{dy}{dt}, \ldots$.

318. *Équations linéaires et homogènes à coefficients constants.* — Supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ soient des nombres donnés. Nous allons chercher à satisfaire à l'équation (1) par une fonction de la forme

$$y = e^{rx}, \tag{7}$$

r étant une constante à déterminer. On déduit de (7)

$$\frac{dy}{dx} = r\,e^{rx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2\,e^{rx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^hy}{dx^h} = r^h\,e^{rx}.$$

En portant ces valeurs de y et de ses dérivées dans l'équation (1) et divisant par e^{rx} qui est en facteur, on obtient l'équation

$$\varphi(r) = r^n + P_1 r^{n-1} + \ldots + P_n = 0. \tag{8}$$

C'est une équation en r, algébrique et de degré n. On l'appelle l'*équation caractéristique* relative à l'équation (1). Si r_1 est une racine de cette équation, e^{r_1x} est une solution particulière de (1). Par conséquent, si (8) a n racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, on connaît pour (1) les n solutions particulières suivantes :

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x}, \quad \ldots, \quad e^{r_nx}.$$

Je dis qu'*elles forment un système de fonctions indépendantes.*

En effet, formons pour ces fonctions le déterminant D de la théorie générale. On a

$$D = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & . & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & . \; . & r_n e^{r_n x} \\ . \; . \; . \; . & . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & . \; . & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & . & 1 \\ r_1 & & r_n \\ . \; . & & . \; . \\ r_1^{n-1} & & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ce second déterminant (de Vandermonde) est égal au produit des différences deux à deux des n quantités $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Il est donc différent de zéro si ces quantités sont distinctes. Dans ce cas, les n solutions particulières obtenues forment un système fondamental et la solution la plus générale de (1) est

$$c_1 e^{r_1 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}.$$

319. Prenons comme exemple l'équation

$$y'' - y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0.$$

Elle a deux racines distinctes qui sont ± 1; à l'une correspond e^x, à l'autre correspond e^{-x}. La solution générale de l'équation est

$$y = A e^x + B e^{-x}.$$

Prenons maintenant l'équation

$$y'' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0;$$

elle a pour racines $\pm i$, d'où les deux intégrales particulières e^{ix}, e^{-ix} et, par suite, la solution générale

$$y = A e^{ix} + B e^{-ix} = (A + B) \cos x + i (A - B) \sin x,$$

ou encore

$$y = a \cos x + b \sin x.$$

Considérons enfin l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^4 - 1 = 0;$$

elle a pour racines 1, -1, i, $-i$. La solution générale de l'équation est donc

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{ix} + De^{-ix} = Ae^{x} + Be^{-x} + A'\cos x + B'\sin x.$$

320. Examinons maintenant le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples.

r étant un nombre quelconque, considérons la fonction obtenue en remplaçant y par e^{rx} dans le premier membre de (1). On a

$$(9)\qquad \frac{d^n(e^{rx})}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}(e^{rx})}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n e^{rx} = e^{rx}\varphi(r).$$

Dérivons cette relation par rapport à r en intervertissant, dans chaque terme du premier membre, l'ordre des dérivations, ce qui revient à écrire

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^k e^{rx}}{dx^k}\right) = \frac{d^k}{dx^k}(xe^{rx}).$$

On obtient la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{rx}) + P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(xe^{rx}) + \ldots + P_n xe^{rx} = e^{rx}[x\varphi(r) + \varphi'(r)].$$

Si r est racine d'ordre supérieur ou égal à 2 de l'équation caractéristique, $\varphi(r)$ et $\varphi'(r)$ sont nuls; par suite, le second membre est nul. Cela montre que xe^{rx} est une intégrale de l'équation (1).

D'une façon générale, dérivons $h-1$ fois par rapport à r la relation (9) en intervertissant, pour chaque terme du premier membre, l'ordre des dérivations par rapport à x et par rapport à r. Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{d^{h-1}}{dr^{h-1}}\left(\frac{d^k e^{rx}}{dx^k}\right) = \frac{d^k}{dx^k}(x^{h-1}e^{rx}),$$

on reconnaît que l'on obtient dans le premier membre l'expression

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{h-1}e^{rx}) + P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{h-1}e^{rx}) + \ldots + P_n x^{h-1}e^{rx}.$$

Quant au second membre, il est égal à e^{rx} multiplié par un polynome linéaire par rapport à φ, φ', ..., $\varphi^{(h-1)}$. Si r est racine d'ordre h de l'équation caractéristique, il annule toutes ces fonctions et, par

suite, le second membre. Donc $x^{h-1}e^{rx}$ est une intégrale de l'équation (1). En résumé, *si r est racine d'ordre h de l'équation caractéristique, les h fonctions $e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots, x^{h-1}e^{rx}$ sont solutions de* (1).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ les racines distinctes de l'équation caractéristique; $h_1, h_2, \ldots, h_\lambda$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Nous avons comme solutions particulières de (1) $h_1 + h_2 + \ldots + h_\lambda = n$ fonctions, savoir :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{llll} e^{r_1x}, & xe^{r_1x}, & \ldots, & x^{h_1-1}e^{r_1x}, \\ e^{r_2x}, & xe^{r_2x}, & \ldots, & x^{h_2-1}e^{r_2x}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ e^{r_\lambda x}, & xe^{r_\lambda x}, & \ldots, & x^{h_\lambda-1}e^{r_\lambda x}. \end{array}\right.$$

On obtient une solution en prenant

$$y = e^{r_1x}\Pi_1(x) + \ldots + e^{r_\lambda x}\Pi_\lambda(x),$$

$\Pi_1, \ldots, \Pi_\lambda$ étant des polynomes arbitraires de degrés respectifs $h_1 - 1, \ldots, h_\lambda - 1$. Je dis que c'est là la solution la plus générale de (1). Il suffit, pour le faire voir, de vérifier que les n fonctions (10) sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas entre ces fonctions de relation linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls. Cela revient à montrer qu'on ne peut avoir de relation de la forme

$$0 = e^{r_1x}P_1(x) + \ldots + e^{r_\lambda x}P_\lambda(x),$$

$P_1, \ldots, P_\lambda$ étant des polynomes non tous nuls. En divisant par e^{r_1x} on aurait

$$0 = P_1(x) + \ldots + e^{(r_\lambda - r_1)x}P_\lambda(x),$$

les différences $r_2 - r_1, \ldots, r_\lambda - r_1$ étant toutes différentes de zéro. On peut dériver cette relation un nombre suffisant de fois pour faire disparaître les termes de $P_1(x)$. On aurait alors une relation analogue contenant un terme de moins, les polynomes qui remplacent $P_1, \ldots,$ n'étant pas tous nuls. En opérant sur cette relation comme sur la précédente et en continuant ainsi, on arriverait à

$$0 = e^{sx}T(x),$$

s étant différent de zéro et T n'étant pas identiquement nul. Une telle relation est impossible; par suite, les n fonctions (10) sont linéairement indépendantes, et la solution la plus générale de (1) a la forme indiquée.

321. Considérons le cas où l'équation différentielle donnée a ses coefficients réels. L'équation caractéristique a ses racines réelles ou imaginaires conjuguées deux à deux. Aux racines $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$ correspondent les solutions suivantes :

$$e^{(\alpha+\beta i)x},\quad xe^{(\alpha+\beta i)x},\quad \ldots,$$
$$e^{(\alpha-\beta i)x},\quad xe^{(\alpha-\beta i)x},\quad \ldots,$$

ou

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad xe^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad \ldots,$$
$$e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\quad xe^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\quad \ldots.$$

La partie de l'intégrale générale correspondant à ces racines peut se mettre sous la forme

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{P}_1(x)+e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{Q}_1(x),$$

P_1 et Q_1 étant des polynomes.

322. *Exemple.* — Prenons l'équation

$$y''+2y'+y=0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2+2r+1=0;$$

elle admet la racine double $r=-1$, d'où l'on déduit les deux solutions particulières e^{-x}, xe^{-x} et, par suite, la solution générale

$$y=e^{-x}(\mathrm{A}+\mathrm{B}x).$$

323. On peut ramener aux équations linéaires et homogènes à coefficients constants les *équations d'Euler*, qui sont de la forme

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}x\frac{dy}{dx}+p_ny=0,$$

p_1, p_2, $\ldots$, p_n étant des constantes.

Posons

$$x=e^t,$$

d'où

$$x'_t=e^t=x.$$

Évaluons les dérivées de y par rapport à la nouvelle variable t. On a

$$y'_t=y'_xx'_t=xy'_x,\qquad y''_{t^2}=xy'_x+x^2y''_{x^2},\qquad \ldots.$$

D'une façon générale, $y^{(p)}_{t^p}$ est une combinaison linéaire de xy', x^2y'', $\ldots$, $x^py^{(p)}$.

En effet, admettons-le jusqu'à l'ordre p inclusivement ; en dérivant de nouveau, le terme $x^\alpha y^{(\alpha)}_{x^\alpha}$ donne $\alpha x^\alpha y^{(\alpha)} + x^{\alpha+1} y^{(\alpha+1)}$.

La dérivée d'ordre $p+1$ est donc bien de la forme indiquée. Inversement, en résolvant les équations obtenues par rapport à xy', x^2y'', $\ldots$, $x^n y^{(n)}$, on obtient, pour ces quantités, des expressions qui sont des combinaisons linéaires et homogènes de $y'_t, y''_{t^2}, \ldots, y^{(n)}_{t^n}$. En portant ces valeurs dans l'équation donnée, celle-ci se transforme en une équation linéaire et homogène, t étant la variable indépendante. Cette équation a des solutions de la forme

$$e^{rt}, \quad te^{rt}, \quad t^2e^{rt}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire, en revenant à la variable x,

$$x^r, \quad x^r Lx, \quad x^r (Lx)^2, \quad \ldots.$$

On est alors conduit, pour intégrer l'équation donnée, à poser

$$y = x^r,$$

r étant indéterminé. En écrivant que l'équation est satisfaite pour une fonction y de cette forme, on obtient une équation dans laquelle x^r est facteur d'un certain polynome en r. En annulant ce polynome on a une équation en r, dite *équation caractéristique*. A toute racine r_0 d'ordre h de cette équation correspondent les h intégrales particulières $x^{r_0}, x^{r_0}Lx, \ldots, x^{r_0}(Lx)^{h-1}$.

324. *Équations avec second membre.* — Considérons l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = f(x);$$

soient y_1 une intégrale particulière de cette équation, y l'intégrale générale. En posant

$$y = y_1 + z,$$

on voit que z est la solution générale de l'équation précédente où l'on fait $f = 0$, c'est-à-dire de l'équation sans second membre.

D'autre part, nous avons vu que, si l'on connaît la solution générale de l'équation sans second membre, la méthode de la variation des constantes permet d'obtenir l'intégrale générale de (2) par des quadratures.

Remarquons que si le second membre de (2) est de la forme $\varphi + \psi + \chi$, si y_1 est une solution de l'équation dont le second membre est φ, y_2 une solution de l'équation dont le second membre

est ψ, y_3 une solution de l'équation dont le second membre est χ, $y_1 + y_2 + y_3$ est solution de (2).

Nous allons montrer comment, dans le cas où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont constants, on peut trouver simplement des intégrales particulières lorsque $f(x)$ est un polynome par rapport à x et à des expressions de la forme $e^{\alpha x}$.

325. En premier lieu, supposons que le second membre de (2) soit un polynome $R(x)$ de degré μ

$$A_0 x^{\mu} + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1} x + A_{\mu}.$$

Je dis que l'on peut trouver une intégrale de (2) constituée par un polynome de degré μ, soit

$$y = \alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu}.$$

En effet, cherchons à satisfaire à (2) par une fonction de cette forme. Nous sommes conduits à identifier l'expression

$$P_n(\alpha_0 x^{\mu} + \ldots + \alpha_{\mu}) + P_{n-1}(\mu\alpha_0 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1}) + \ldots$$

avec $R(x)$. En égalant les coefficients de x^{μ}, on a

$$P_n \alpha_0 = A_0.$$

Si $P_n \neq 0$, on tire de là α_0. En égalant ensuite les coefficients de $x^{\mu-1}$, on a

$$P_n \alpha_1 + P_{n-1} \mu \alpha_0 = A_1,$$

relation qui détermine α_1. On détermine ainsi successivement les $\mu + 1$ coefficients de y. Donc il y a, dans le cas de $P_n \neq 0$, un polynome de degré μ qui est solution de (2).

Supposons P_n nul, ainsi que $P_{n-1}, \ldots, P_{n-k+1}$; alors la dérivée d'ordre minimum qui figure dans (2) est $\dfrac{d^k y}{dx^k}$.

On peut considérer l'équation comme étant d'ordre $n - k$ par rapport à cette dérivée, qu'on prendra comme fonction inconnue. Cette nouvelle équation rentre dans les conditions précédentes. On y satisfait en prenant pour $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ un polynome de degré μ. Par k quadratures, on en déduit pour y un polynome de degré $\mu + k$ qui satisfait à (2).

326. Supposons maintenant que le second membre de l'équation donnée soit $e^{gx} R(x)$, g étant un nombre constant, R un polynome.

Posons

$$y = z e^{gx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^{gx}\left(\frac{dz}{dx} + gz\right), \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{gx}\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2g\frac{dz}{dx} + g^2 z\right), \qquad \ldots$$

D'une façon générale, $\frac{d^k y}{dx^k}$ est égal à e^{gx} multiplié par une combinaison linéaire de z, $\frac{dz}{dx}$, ..., $\frac{d^k z}{dx^k}$. En portant ces valeurs dans (2), on voit que e^{gx} est en facteur dans les deux membres. En supprimant ce facteur, on obtient en z une équation différentielle linéaire d'ordre n, dans laquelle le second membre est un polynome. Cette équation rentre donc dans le cas précédent et admet pour intégrale un polynome.

327. Supposons que le second membre soit de la forme $\Sigma e^{gx} P(x)$. On cherche séparément une intégrale pour chaque équation obtenue en prenant dans le second membre un seul des termes $e^{gx} P(x)$. On prend ensuite la somme de ces intégrales particulières. C'est une intégrale particulière de l'équation donnée.

La méthode exposée s'applique au cas où le second membre est un polynome en x, e^{gx}, ..., $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, ..., en exprimant les fonctions trigonométriques au moyen d'exponentielles.

328. *Systèmes d'équations linéaires.* — Considérons le système de n équations différentielles linéaires à n fonctions inconnues

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z + \ldots + R_1 t = V_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z + \ldots + R_2 t = V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dt}{dx} + P_n y + Q_n z + \ldots + R_n t = V_n, \end{cases}$$

les P, Q, R, ..., V étant des fonctions données de x.

Le problème de l'intégration de ce système peut se ramener aux problèmes précédents par des opérations algébriques. En effet, dérivons $n-1$ fois chacune des équations (1). Nous obtenons ainsi n^2 équations entre lesquelles nous pouvons éliminer les fonctions z, ..., t et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, soit donc en tout $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ fonctions, qui d'ailleurs entrent linéairement

dans les équations. Le résultat de l'élimination est une équation linéaire entre y et ses dérivées jusqu'à l'ordre n.

Nous allons étudier directement le système (1).

329. Étant donnés plusieurs systèmes de fonctions

$$\begin{array}{cccc} y_1, & z_1, & \ldots, & t_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_h, & z_h, & \ldots, & t_h, \end{array}$$

nous appellerons *combinaison linéaire et homogène de ces systèmes* le système suivant, où les λ sont constants :

$$\begin{array}{l} y = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_h y_h, \\ z = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_h z_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_h t_h. \end{array}$$

Étant donnés plusieurs systèmes, si aucun d'eux ne se réduit à une combinaison linéaire et homogène des autres, nous dirons que ces systèmes sont *indépendants*.

330. Supposons qu'on ait n systèmes de solutions des équations (1) où l'on fait $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = 0$, c'est-à-dire des équations (1) sans seconds membres, soit

$$\begin{array}{cccc} y_1, & z_1, & \ldots, & t_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n, & z_n, & \ldots, & t_n, \end{array}$$

et que le déterminant de ces n^2 fonctions ne soit pas identiquement nul. Il en résulte que ces n systèmes sont indépendants au sens précédent. En effet, si l'on avait, par exemple,

$$\begin{array}{l} y_n = k_1 y_1 + \ldots + k_{n-1} y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = k_1 t_1 + \ldots + k_{n-1} t_{n-1}, \end{array}$$

le déterminant serait identiquement nul.

Nous allons chercher, en partant de là, la solution générale des équations (1) avec ou sans seconds membres. Cherchons à satisfaire

à ces équations par des fonctions de la forme

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n,\\
z &= c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t &= c_1 t_1 + \ldots + c_n t_n,
\end{aligned}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant certaines fonctions de x qu'il s'agit de déterminer. Portons ces expressions dans les équations (1) et cherchons par exemple le coefficient de c_1 dans le premier membre de la première équation. On a

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c'_1 y_1 + \ldots;$$

on voit que le coefficient de c_1 est la fonction

$$\frac{dy_1}{dx} + P_1 y_1 + \ldots + R_1 t_1,$$

qui est nulle par hypothèse. De même, les coefficients de $c_2, \ldots, c_n$ sont nuls. Les équations (1) sont donc remplacées par

$$\begin{aligned}
c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n &= V_1,\\
c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + \ldots + c'_n z_n &= V_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c'_1 t_1 + c'_2 t_2 + \ldots + c'_n t_n &= V_n.
\end{aligned}$$

On a ainsi n équations linéaires entre $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$. Le déterminant de ces équations est différent de o, du fait que les systèmes de solutions sont indépendants. Elles permettent donc de calculer c'_1, $c'_2, \ldots, c'_n$. Par des quadratures, on en déduira $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

331. Si les V sont nuls, la solution de ce système est

$$c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0.$$

Cela montre que la solution générale du système sans seconds membres est une combinaison linéaire et homogène des premières solutions.

332. Dans le cas où les P, Q, ..., R sont constants et où les V sont nuls, en utilisant les résultats obtenus (nº 318), on reconnaît que l'on doit trouver pour y une solution de la forme αe^{rx}; de là résulte que z, qui est une combinaison linéaire et homogène de y et de ses dérivées, est aussi de la forme βe^{rx}; il en est de même pour les autres

fonctions. On est alors conduit à chercher directement pour (1) des solutions de cette forme.

Prenons, pour fixer les idées, le système de trois équations suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + ay + bz + cu = 0, \\ &\frac{dz}{dx} + a'y + b'z + c'u = 0, \\ &\frac{du}{dx} + a''y + b''z + c''u = 0, \end{aligned}\right.$$

a, b, ... étant des nombres donnés.

Cherchons un système de solutions de la forme

$$y = \alpha e^{rx}, \qquad z = \beta e^{rx}, \qquad u = \gamma e^{rx};$$

on est conduit à résoudre les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &(a+r)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ &a'\alpha + (b'+r)\beta + c'\gamma = 0, \\ &a''\alpha + b''\beta + (c''+r)\gamma = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce sont trois équations homogènes en α, β, γ qui doivent avoir en α, β, γ des solutions non toutes nulles. Il faut donc que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a+r & b & c \\ a' & b'+r & c' \\ a'' & b'' & c''+r \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation en r est l'équation caractéristique du système (1); si r_0 en est une racine simple, pour $r = r_0$ les équations (2) sont compatibles en α, β, γ et déterminent α, β, γ. Il en résulte, pour (1), un système d'intégrales. Si r_0 est une racine double de (3), l'équation en y a pour intégrales correspondantes $e^{r_0 x}$ et $xe^{r_0 x}$. On cherche alors à satisfaire à (1) par des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} y &= e^{r_0 x}(A + Bx), \\ z &= e^{r_0 x}(A' + B'x), \\ u &= e^{r_0 x}(A'' + B''x), \end{aligned}$$

A, B, A', B', A'', B'' étant des coefficients constants que l'on détermine comme on a déterminé α, β, γ.

Prenons par exemple le système suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - 3y + z = 0, \\ &\frac{dz}{dx} - 4y + z = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$y = \alpha e^{rx}, \qquad z = \beta e^{rx},$$

α, β, r étant des constantes à déterminer ; en substituant ces expressions dans (4), on a, en divisant par e^{rx},

$$r\alpha - 3\alpha + \beta = 0, \qquad r\beta - 4\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(r - 3)\alpha + \beta = 0, \qquad -4\alpha + (r + 1)\beta = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$(r - 3)(r + 1) + 4 = 0,$$

ou

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Elle admet la racine double $r = 1$. Nous sommes conduits à chercher des solutions de la forme

$$y = e^x(A + Bx), \qquad z = e^x(A' + B'x).$$

En faisant de nouveau la substitution, on obtient en divisant par e^x

$$\begin{cases} A + Bx + B - 3(A + Bx) + A' + B'x = 0, \\ A' + B'x + B' - 4(A + Bx) + A' + B'x = 0. \end{cases}$$

Ces équations devant être vérifiées quel que soit x, il faut que l'on ait

$$-2A + B + A' = 0, \qquad -2B + B' = 0,$$
$$2A' + B' - 4A = 0, \qquad -4B + 2B' = 0.$$

La deuxième et la quatrième sont identiques et donnent

$$B' = 2B;$$

de même la première et la troisième donnent toutes deux

$$A' = 2A - B.$$

Nous avons ainsi les quatre coefficients en fonction de deux d'entre eux, d'où la solution générale en fonction de deux constantes arbitraires

$$y = e^x(A + Bx), \qquad z = e^x(2A - B + 2Bx).$$

V. — Systèmes différentiels et équations linéaires aux dérivées partielles.

333. Considérons un système d'équations différentielles contenant autant de fonctions inconnues que d'équations, résolu par rapport aux dérivées, soit

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1 \ldots y_n).$$

On peut encore l'écrire

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}.$$

Nous modifierons les notations de façon à introduire la symétrie entre la variable et les fonctions et nous considérerons un système d'équations différentielles mis sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

les X étant des fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. De cette manière, on ne spécifie pas quelle est, parmi les variables x_1, $x_2 \ldots x_n$, la variable indépendante. Si, dans un certain domaine de variation pour $x_1, x_2, \ldots x_n$, la fonction X_i par exemple reste différente de o, le système pourra se mettre sous la forme suivante

$$\frac{dx_k}{dx_i} = \frac{X_k}{X_i}, \qquad k = 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots, n;$$

on a $n-1$ équations différentielles ordinaires, la variable indépendante étant x_i et les fonctions inconnues étant $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

On peut encore procéder autrement, en introduisant une nouvelle variable t et écrivant

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

On considère alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonctions de la variable indépendante t.

334. Dans tous les cas, on sait que, sous certaines conditions qui

ont été précisées dans le théorème d'existence, le système (1) admet un système d'intégrales dépendant de $n-1$ constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Si x_1 par exemple est la variable indépendante, on aura une solution de la forme

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ x_3 &= \varphi_3(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}). \end{aligned}$$

Supposons qu'on puisse résoudre ces équations par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. On obtiendra $n-1$ relations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{n-1}. \end{cases}$$

Étudions les propriétés de ces fonctions f. L'une quelconque d'entre elles reste constante lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de manière à satisfaire aux équations (1), de sorte que l'on a, dans ces conditions,

$$df = 0.$$

Or, on a toujours

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

En tenant compte des équations (1), on doit donc avoir la relation

$$(3)\qquad X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

cette relation étant vérifiée pour toute fonction f qui reste constante lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de façon à satisfaire aux équations (1). Or, dans les intégrales de (1), mises sous la forme (2), par exemple, on peut prendre arbitrairement la valeur initiale $(x_1)_0$ de x_1, puis les valeurs initiales $(x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$ correspondant à $(x_1)_0$; par conséquent, (3) doit être vérifiée pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire doit avoir lieu identiquement, avec la seule réserve que les systèmes de valeurs considérés sont compris dans le domaine où les conditions d'existence et d'holomorphie sont réalisées.

La relation (3) est une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles. On voit que toute fonction f du système (2) satisfait à cette équation.

Réciproquement, étant donnée une fonction f satisfaisant à l'équation (3), si les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient en fonction d'un paramètre de manière que leurs différentielles satisfassent aux relations (1), on reconnaît que la différentielle df correspondante est nulle. Donc, dans ces conditions, f reste constant.

Toute fonction f satisfaisant à (3), c'est-à-dire toute intégrale de (3), est dite une *intégrale première* du système (1).

335. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$, h intégrales de (3). Je dis que toute fonction

$$F = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_h),$$

constituée en prenant une fonction arbitraire de $f_1, f_2, \ldots, f_h$, est une intégrale de (3). En effet, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_h}\frac{\partial f_h}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Formons la combinaison

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Le coefficient de $\frac{\partial \varphi}{\partial f_1}$ est $X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$, c'est-à-dire o par hypothèse; il en est de même pour les coefficients de $\frac{\partial \varphi}{\partial f_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial f_h}$. La fonction F vérifie donc la relation (3).

Je dis que, *si l'on connaît $n-1$ intégrales de* (3), $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, *constituant un système de fonctions indépendantes, toute autre intégrale de* (3) *est une fonction des* $n-1$ *premières.*

$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ étant des fonctions indépendantes, si l'on considère le Tableau des dérivées

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les déterminants d'ordre $n-1$ issus de ce Tableau ne sont pas tous nuls. Soit f une intégrale de (3); remplaçons successivement dans (3) la fonction inconnue par $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f$. On a ainsi n relations linéaires et homogènes entre les fonctions non toutes nulles X_1, $X_2, \ldots, X_n$. On en déduit que le déterminant correspondant est nul,

c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les déterminants d'ordre $n-1$ issus des $n-1$ premières lignes ne sont pas tous nuls par hypothèse, la théorie des fonctions dépendantes montre que f est fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ (*cf.* t. I, n° 115, p. 109).

En résumé, *la solution générale de* (3) *est de la forme* $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$, φ *étant une fonction arbitraire et* $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ *étant* $n-1$ *solutions particulières de* (3) *formant un système de fonctions indépendantes.*

336. Nous allons étudier ce que deviennent, par un changement des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'une part le système (1), d'autre part l'équation (3).

Soit le changement de variables défini par les relations

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_n).$$

On suppose que cette substitution est réversible, c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Effectuons d'abord le changement de variables défini par (4) dans les équations (1). Soit λ la valeur commune des rapports $\dfrac{dx_i}{X_i}$; ces équations s'écrivent :

$$(5) \qquad dx_i = \lambda X_i.$$

Partons des formules

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n.$$

En tenant compte de (5), elles deviennent

$$dy_1 = \lambda\left(X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dy_n = \lambda\left(X_1 \frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right).$$

On voit donc que si l'on pose

$$Y_k = X_1 \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_k}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial y_k}{\partial x_n},$$

le système (1) se transforme en un système qui peut se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}.$$

Effectuons maintenant le même changement de variables dans l'équation (3).

Étant donnée une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, désignons par $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ce que devient cette fonction par le changement de variables considéré. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}.$$

Formons, avec ces expressions, la combinaison

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

c'est-à-dire le premier membre de (3). On reconnaît que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial y_k}$ est

$$X_1 \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial y_k}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial y_k}{\partial x_n},$$

c'est-à-dire Y_k.

L'équation (3) se transforme donc en l'équation suivante :

$$(7) \qquad Y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Ainsi, en effectuant le même changement de variables, d'une part sur les équations (1), d'autre part sur l'équation (3), on obtient

les équations (6) et (7), la relation entre (6) et (7) étant la même qu'entre (1) et (3).

D'après cela, si f est une intégrale de (3), la fonction F transformée de f est une intégrale de (7), et réciproquement. Un système de h intégrales indépendantes de l'une des équations (3) ou (7) se transforme en un système de h intégrales indépendantes de l'autre.

337. En ce qui concerne l'intégration du système (1), si l'on connaît $n-1$ intégrales indépendantes de l'équation (3), soient f_1, $f_2, \ldots, f_{n-1}$, en les égalant à des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, on a des équations que l'on peut résoudre par rapport à $n-1$ des variables et qui fournissent la solution générale du système (1); on peut disposer des constantes pour faire correspondre à une valeur donnée de x_1, $n-1$ valeurs données pour $x_2, \ldots, x_n$.

338. Supposons que l'on connaisse p ($p < n-1$) intégrales premières de (1), constituant p intégrales indépendantes de (3). Cherchons à tirer parti de la connaissance de ces intégrales pour faciliter la résolution du problème.

Soit donc $f_1, f_2, \ldots, f_p$ un système de p intégrales indépendantes de (3). L'un au moins des déterminants fonctionnels de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ par rapport aux x est différent de o. Supposons que ce soit $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$. Faisons un changement de variables en introduisant des variables y définies de la façon suivante.

Nous posons

$$(8)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_p, \\ x_{p+1} = y_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n \quad = y_n. \end{cases}$$

Ce système d'équations peut être résolu par rapport aux x. Il suffit pour cela de faire l'inversion des p premières relations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ce qui est possible d'après l'hypothèse

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)} \neq 0.$$

On peut donc définir le changement de variables par des équations

de la forme suivante :

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = \psi_1(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = \psi_p(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n), \\ x_{p+1} = y_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \;\; = y_n. \end{cases}$$

Par le changement de variables (9), le système (1) et l'équation (3) se transforment respectivement en un système (6) et une équation (7). Cette équation (7) doit être vérifiée par les fonctions F qui sont les transformées de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, c'est-à-dire par les fonctions y_1, $y_2, \ldots, y_p$.

Or, pour $F = y_1$, par exemple, on a

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Pour que (7) soit vérifiée par cette fonction, il faut que l'on ait

$$Y_1 = 0.$$

On reconnaît de même que l'on doit avoir

$$Y_2 = \ldots = Y_p = 0,$$

de sorte que l'équation (7) a la forme suivante :

$$Y_{p+1}\frac{\partial F}{\partial y_{p+1}} + \ldots + Y_n\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Le système (6) est le suivant :

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_p}{0} = \frac{dy_{p+1}}{Y_{p+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n};$$

il conduit aux équations

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_p = 0$$

et

$$\frac{dy_{p+1}}{Y_{p+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}.$$

Des p premières équations résulte

$$y_1 = c_1, \qquad y_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad y_p = c_p,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_p$ étant des constantes arbitraires. Il reste à intégrer un

système contenant $n - p$ variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$ liées par $n - p - 1$ relations différentielles.

Pratiquement, on peut appliquer cette méthode en mettant dans les équations (8), à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$. On peut donc énoncer la règle pratique suivante :

Si l'on connaît p intégrales premières indépendantes de (1), on les égale à des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$, on résout les p équations ainsi obtenues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui se trouvent exprimées en fonction de $x_{p+1}, \ldots, x_n$ et de $c_1, c_2, \ldots, c_p$. On porte ces fonctions dans le système (1), qui se réduit alors à un système d'équations différentielles comprenant p fonctions et p équations de moins.

Il résulte de tout l'ensemble de la théorie que le problème de la recherche de la solution générale du système (1) et celui de l'intégration de (3) sont deux problèmes équivalents.

339. Donnons quelques applications de cette théorie.

Soit le système

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = ry - qz, \qquad \frac{dy}{dt} = pz - rx, \qquad \frac{dz}{dt} = qx - py,$$

p, q, r étant des fonctions données de t. Formons la combinaison $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}$; le second membre est identiquement nul, et, comme le premier est la différentielle de $x^2 + y^2 + z^2$, on en déduit

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

La fonction $x^2 + y^2 + z^2$ est une intégrale première du système donné. La combinaison que l'on a formée pour l'obtenir est dite une *combinaison intégrable* des équations données.

On peut de la relation obtenue tirer, par exemple, z en fonction de x, y, c, puis, porter dans les équations (1) qui se réduisent alors à deux. On a

$$z = \pm\sqrt{c - x^2 - y^2},$$

et les deux équations

$$\frac{dx}{dt} = ry \mp q\sqrt{c - x^2 - y^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \pm p\sqrt{c - x^2 - y^2} - rx.$$

On peut vérifier que la troisième équation est satisfaite d'elle-même. On a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{c - x^2 - y^2}},$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(qx - py)\sqrt{c - x^2 - y^2}}{\sqrt{c - x^2 - y^2}} = qx - py.$$

La connaissance d'une intégrale première nous permet donc, comme la théorie générale nous l'avait appris, de diminuer d'une unité le nombre des équations et des fonctions inconnues.

340. Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = yz, \qquad \frac{dy}{dt} = zx, \qquad \frac{dz}{dt} = xy,$$

ou encore, en supprimant la variable t,

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}.$$

En égalant le premier et le second rapport, puis le premier et le troisième, on a

$$x\,dx - y\,dy = 0, \qquad x\,dx - z\,dz = 0,$$

d'où

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad x^2 - z^2 = c_2.$$

On a ainsi deux intégrales premières. On pourrait, en égalant le second et le troisième rapport, en avoir une troisième $y^2 - z^2 = c_3$; mais elle n'est pas indépendante des deux premières.

On déduit des deux relations précédentes

$$y = \sqrt{x^2 - c_1}, \qquad z = \sqrt{x^2 - c_2}.$$

On a ainsi y et z en fonction de x. Pour avoir x en fonction de t, portons ces valeurs dans la première équation. On a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(x^2 - c_1)(x^2 - c_2)}.$$

Si l'on peut intégrer cette équation, on aura la solution du système donné.

341. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'étudier une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles. Soit l'équation

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

D'après la théorie générale, on doit former le système d'équations différentielles auxiliaire

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}.$$

En égalant le premier et le second rapport, puis le premier et le troisième, on obtient des équations différentielles dans lesquelles les variables sont séparées et d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{y-b}{x-a} = c_1, \qquad \frac{z-c}{x-a} = c_2.$$

Donc la solution générale de l'équation donnée est la fonction

$$\varphi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right),$$

φ étant une fonction arbitraire. On sait qu'en l'égalant à 0, on a l'équation générale des cônes de sommets a, b, c.

342. Soit à intégrer l'équation

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 2xy\frac{\partial f}{\partial y} - (2x^2 + xz + 8y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Considérons le système auxiliaire

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{dy}{2xy} = -\frac{dz}{2x^2 + xz + 8y^2}.$$

En prenant les deux premiers rapports, on obtient l'intégrale première

$$x^2 y = \lambda.$$

Pour simplifier l'étude du système, tirons de cette équation y en fonction de λ et de x, et portons cette valeur dans le troisième rapport, que nous égalons au premier.

Il vient

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-\left(2x^2 + xz + \frac{8\lambda^2}{x^4}\right)}$$

ou

$$\left(2x^2 + xz - \frac{8\lambda^2}{x^4}\right)dx + x^2\,dz = 0,$$

ou, en divisant par x,

$$\left(2x + z - \frac{8\lambda^2}{x^5}\right)dx + x\,dz = 0.$$

En remarquant que $z\,dx + x\,dz$ est la différentielle de xz, on voit que le premier membre de cette relation est une différentielle exacte. On déduit de là

$$x^2 + xz + \frac{2\lambda^2}{x^4} = \mu.$$

On a finalement les deux intégrales premières

$$x^2 y = \lambda, \qquad x^2 + xz + 2y^2 = \mu.$$

Par suite, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles donnée est

$$\varphi(x^2 y,\ x^2 + xz + 2y^2).$$

343. *Équations aux dérivées partielles linéaires non homogènes.* — Considérons l'équation

$$(1)\qquad P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial z}{\partial x_n} - R = 0,$$

z étant une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; P_1, $P_2, \ldots, P_n$, R étant des fonctions analytiques données de $x_1, \ldots,$ x_n, z.

Nous poserons, d'une façon générale,

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$(1)\qquad P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n - R = 0.$$

Cherchons à déterminer une fonction V de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z telle que l'équation

$$(2)\qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

résolue par rapport à z, définisse pour z une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui soit solution de (1). Cherchons à quelles conditions doit satisfaire V. z étant défini par (2), dérivons cette équation (2) par rap-

port à x_i; on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0,$$

d'où

$$p_i = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial z}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En portant cette valeur de p_i dans l'équation (1), celle-ci prend la forme

$$(3) \qquad P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

C'est, par rapport à la fonction inconnue V, une équation homogène à $n+1$ variables. Si l'on a une solution de l'équation (3), en égalant à 0 cette solution, on définit une certaine fonction implicite z de $x_1, \ldots, x_n$ qui vérifie l'équation (1). Mais nous ne savons pas si l'on obtient par ce procédé toutes les solutions de (1).

344. Supposons qu'on connaisse la solution générale de (3), ce qui suppose qu'on a déterminé n solutions indépendantes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de cette équation. Toute intégrale de (3) est de la forme $\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Nous allons chercher si toute intégrale de (1) satisfait à une relation de la forme $\Phi = 0$.

Partons d'une intégrale déterminée de (1). Dans $V_1, V_2, \ldots, V_n$, remplaçons z par cette fonction et posons d'une façon générale

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_i(z, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Formons le déterminant fonctionnel Δ des U par rapport aux x. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial U_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial U_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial V_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k},$$

d'où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_1}{\partial z} p_1 & \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_1}{\partial z} p_2 & \cdots & \dfrac{\partial V_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial V_1}{\partial z} p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial V_n}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_n}{\partial z} p_1 & \dfrac{\partial V_n}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_n}{\partial z} p_2 & \cdots & \dfrac{\partial V_n}{\partial x_n} + \dfrac{\partial V_n}{\partial z} p_n \end{vmatrix}.$$

En décomposant ce déterminant par la méthode habituelle, on obtient une somme de 2^n déterminants partiels. Tout déterminant partiel contenant deux colonnes renfermant les quantités p est nul, comme ayant deux colonnes proportionnelles. Δ est donc égal au déterminant partiel ne contenant aucune quantité p, c'est-à-dire à $\frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, plus la somme de p déterminants dans chacun desquels une colonne contient en facteur p_i. On a donc

$$(4)\qquad \Delta = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} + \sum p_i \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)}.$$

D'autre part, les V étant solutions de l'équation (3), on a les n relations suivantes :

$$(5)\qquad P_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V_i}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V_i}{\partial x_n} = R \frac{\partial V_i}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (5), considéré comme un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux quantités $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$, les définit à un facteur de proportionnalité près, car, si l'on pose

$$D_0 = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad D_i = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)},$$

les déterminants $D_0, D_1, \ldots, D_n$ ne sont pas tous nuls, du fait que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont intégrales indépendantes de (3).

En résolvant les équations (5) par la règle de Cramer, on obtient, M étant un certain facteur,

$$(6)\qquad P_i = MD_i, \qquad R = -MD_0.$$

Remarquons que, les D n'étant pas tous nuls, on peut, d'une au moins des relations (6), tirer M, qui peut donc être considéré comme connu.

Cela posé, l'équation (4) s'écrit

$$\Delta = D_0 + \Sigma p_i D_i,$$

d'où l'on déduit, d'après (6), en multipliant par M,

$$(7)\qquad \Delta M = \Sigma P_i p_i - R.$$

Or, lorsque z est intégrale de (1), le second membre est nul; donc on a alors

$$\Delta M = 0,$$

ce qui exige soit $\Delta = 0$, soit $M = 0$.

Si $\Delta = 0$, c'est que les fonctions U sont liées par une relation

$$\Phi(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0,$$

ce qui revient à dire que z, considéré comme solution de (1), satisfait à l'équation

$$\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0$$

et est défini par cette équation. Donc, dans le cas de $\Delta = 0$, la solution z de l'équation (1) est fournie par la méthode indiquée.

Il reste comme intégrales pouvant n'être pas données par cette méthode celles qui satisfont à l'équation

$$M = 0.$$

Ce sont des intégrales qu'on peut appeler *intégrales singulières;* elles annulent $P_1, P_2, \ldots, P_n$, R, et ne contiennent ni constantes, ni fonctions arbitraires.

Si l'on cherche seulement les solutions de (1) contenant des fonctions arbitraires, on a la règle pratique suivante :

Étant donnée l'équation (1), *pour l'intégrer, on forme le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}.$$

Supposons qu'on ait la solution générale de ce système, c'est-à-dire qu'on en connaisse n intégrales premières indépendantes,

$$f_1 = c_1, \quad \ldots, \quad f_n = c_n;$$

on établit entre ces intégrales premières une relation arbitraire

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0.$$

La solution générale de (1) *est la fonction z de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie par cette équation.*

345. Donnons des exemples d'application de cette méthode. Soit l'équation

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = pz,$$

où p est une constante donnée. Nous devons considérer le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}.$$

Cherchons des intégrales premières de ce système. En égalant le premier rapport successivement à chacun des autres, on a des équations que l'on peut intégrer et qui donnent

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_1^p} = c_n.$$

D'ailleurs, toutes ces intégrales premières sont indépendantes. La solution générale de l'équation donnée s'obtient en établissant une relation arbitraire entre ces fonctions, soit

$$\mathrm{F}\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{z}{x_1^p}\right) = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à z,

$$z = x_1^p \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

On voit que z est une fonction homogène et de degré p des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

346. Soit l'équation

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

a et b étant des constantes, z une fonction inconnue de x, y. Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

d'où les intégrales premières

$$x - az = c_1, \quad y - bz = c_2.$$

La solution générale en z est définie par l'équation

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

C'est l'équation générale des cylindres parallèles à la direction de paramètres a, b, 1.

347. Soit l'équation

$$bx - ay + (bz - cy)\frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx}.$$

Cherchons à former des combinaisons intégrables de ces équations, c'est-à-dire des combinaisons donnant lieu à différentielles exactes. Multiplions les deux termes du premier rapport par a, les deux termes du second par b, les deux termes du troisième par c, et ajoutons. Le dénominateur obtenu est identiquement nul; donc on doit avoir

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$ax + by + cz = c_1.$$

En multipliant de même par x, y, z et ajoutant terme à terme, on obtient

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

On a deux intégrales premières qui sont d'ailleurs indépendantes. Il en résulte que la solution générale de l'équation est donnée par

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2,\ ax + by + cz) = 0.$$

C'est l'équation générale des surfaces de révolution ayant pour axe la droite passant par l'origine et ayant pour paramètres a, b, c.

348. *Interprétation géométrique de la méthode d'intégration.* — Prenons d'abord le cas d'une fonction z de deux variables indépendantes x, y, et posons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$Pp + Qq = R, \tag{1}$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z. Il s'agit de trouver une fonction $z = \varphi(x, y)$ vérifiant (1).

Considérons la surface représentée en coordonnées cartésiennes

rectangulaires par l'équation

$$(2) \qquad z = \varphi(x, y).$$

Nous dirons que c'est une *surface intégrale* pour (1). Le plan tangent à cette surface au point (x, y, z) a pour équation

$$(3) \qquad p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

Convenons de faire correspondre à tout point (x, y, z) de l'espace la droite D ayant pour équations

$$(4) \qquad \frac{X - x}{P(x, y, z)} = \frac{Y - y}{Q(x, y, z)} = \frac{Z - z}{R(x, y, z)}.$$

D'après cela, et en vertu de l'équation (1), *si* $z = \varphi(x, y)$ *est une surface intégrale pour* (1), *en tout point* (x, y, z) *de cette surface, le plan tangent contient la droite* D *correspondante.*

Nous appellerons *courbe caractéristique* une courbe définie par la condition d'être, en chacun de ses points, tangente à la droite D correspondant à ce point. Or, on sait qu'en un point x, y, z d'une courbe, les coefficients directeurs de la tangente sont proportionnels à dx, dy, dz. On doit donc avoir en tout point d'une courbe caractéristique

$$(5) \qquad \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Réciproquement, toute courbe vérifiant ces relations est une courbe caractéristique.

Ce système (5) est le système auxiliaire que nous avons introduit pour intégrer (1). Soient

$$(6) \qquad \psi(x, y, z) = \lambda, \qquad \psi_1(x, y, z) = \mu$$

deux intégrales premières de ce système; ce seront les équations des courbes caractéristiques. Elles dépendent de deux paramètres.

D'autre part, la solution générale de (1) est obtenue en introduisant une relation arbitraire entre ψ et ψ_1, soit

$$F(\psi, \psi_1) = 0.$$

D'après la théorie de la génération des surfaces, cette équation est l'équation générale des surfaces engendrées par une courbe de la famille

$$\psi = \lambda, \qquad \psi_1 = \mu,$$

se déplaçant en fonction d'un paramètre. Donc, *pour obtenir les surfaces intégrales de* (1), *on considère les courbes caractéristiques dont les équations* (6) *s'obtiennent en intégrant le système* (5). *On assujettit les deux paramètres* λ, μ *dont dépendent ces courbes à une relation* $F(\lambda, \mu) = 0$. *Elles varient alors en fonction d'un paramètre et engendrent des surfaces qui sont surfaces intégrales pour* (1).

Dans l'exemple du n° 346,

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

les courbes caractéristiques ont pour équations

$$x - az = \lambda, \qquad y - bz = \mu.$$

Ce sont des droites parallèles à la direction de paramètres a, b, 1. Les surfaces intégrales sont des cylindres ayant ces droites pour génératrices.

Dans l'exemple du n° 347, les caractéristiques ont pour équations

$$ax + by + cz = \lambda, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \mu.$$

Ce sont des cercles ayant pour axe la droite d'équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Les surfaces engendrées par ces cercles, c'est-à-dire les surfaces intégrales, sont des surfaces de révolution.

On sait que le mouvement d'une courbe dépendant de deux paramètres est défini si l'on assujettit cette courbe à rencontrer une courbe fixe. La courbe mobile engendre une certaine surface qui contient la courbe fixe. En appliquant ceci aux courbes caractéristiques, on voit qu'étant donnée une courbe fixe, on peut trouver une surface intégrale contenant cette courbe fixe.

349. Dans le cas de n variables indépendantes ($n > 2$), on peut interpréter les résultats en un langage géométrique conventionnel. Nous dirons qu'une relation

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

définit une surface dans l'espace à $n+1$ dimensions, et qu'un système de relations où $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z sont fonctions de t définit une courbe dans cet espace.

Cela posé, étant donnés l'équation aux dérivées partielles

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R$$

et le système auxiliaire qui lui est associé,

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

si la solution générale de ce système est

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = c_1, \quad \ldots, \quad \psi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = c_n,$$

nous dirons encore que ces équations représentent une famille de courbes caractéristiques. Ces courbes dépendent de n paramètres ; en établissant une relation arbitraire entre ces paramètres, c'est-à-dire en faisant varier les caractéristiques en fonction de $n - 1$ paramètres, on obtient des surfaces intégrales.

VI. — Équations aux différentielles totales.

350. Considérons la relation suivante :

$$(1) \qquad dz = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n,$$

dans laquelle z est une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions données de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous nous proposons de voir si l'on peut déterminer une fonction z des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que sa différentielle satisfasse à (1). Cette équation (1) est équivalente au système de n équations

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes ramenés à un système de n équations aux dérivées partielles. S'il existe une fonction z vérifiant (2), nous pouvons exprimer une dérivée de cette fonction telle que $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k}$ de deux manières différentes, en dérivant l'équation (2) de rang i par rapport à x_k et l'équation de rang k par rapport à x_i. En égalant les deux expressions obtenues, on a

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z} f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z} f_i.$$

En considérant tous les différents couples de nombres i, k, on a

$\frac{n(n-1)}{2}$ relations que nous appellerons *conditions d'intégrabilité*. Deux cas sont à distinguer :

1° Les équations (3) ne sont pas toutes vérifiées identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs données à $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Celles qui ne le sont pas constituent des équations de condition auxquelles doit satisfaire z. Il y a lieu de voir s'il existe une fonction z satisfaisant à ces conditions et à la relation (1). Les fonctions z qu'on peut obtenir ainsi sont déterminées et ne contiennent pas de constantes arbitraires.

2° Les équations (3) se réduisent à des identités, c'est-à-dire sont vérifiées, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Nous allons montrer que, dans ce cas, on peut trouver une fonction z dépendant d'une constante arbitraire et vérifiant (1). Nous dirons alors que l'équation (1) ou le système (2) est *complètement intégrable*.

351. Partons de la première des équations (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z).$$

Si l'on fixe $x_2, \ldots, x_n$, cette équation est une équation différentielle ordinaire. Elle a en z une intégrale dépendant d'une constante arbitraire u; dans $u, x_2, \ldots, x_n$ figurent comme paramètres. Soit

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

cette intégrale. Tout revient à introduire entre $x_2, \ldots, x_n$ et u qui reste arbitraire des relations telles que cette fonction $z = \varphi$ satisfasse aux autres relations (2). Portons cette valeur de z dans les $n-1$ équations (2) restantes ; elles deviennent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

On tire de là

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{f_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Nous avons là un système analogue à (2), mais ne renfermant plus que $n-1$ équations. Nous allons démontrer que dans ce système (4) :

1° Les seconds membres des équations ne contiennent pas x_1 et par suite se réduisent à des fonctions $\theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$ de $x_2, \ldots, x_n$.

2° Les fonctions θ_i satisfont aux conditions d'intégrabilité du système (4).

352. Pour établir le premier point, nous posons

$$\theta_i = \frac{f_i - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}, \tag{5}$$

et nous allons montrer que $\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}$ est nul. Calculons d'une façon générale $\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}$. On a, en dérivant (5),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}. \tag{6}$$

Faisons maintenant $k = 1$, il vient

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_1}. \tag{7}$$

Or, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = f_1, \tag{8}$$

d'où, en dérivant par rapport à x_i, puis par rapport à u,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Remplaçons $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial u}$ par ces valeurs dans l'équation (7); remplaçons aussi, en tenant compte des relations (3) et (8), $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ par $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_i$; il vient, en divisant par $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

353. Montrons maintenant que les fonctions θ_i satisfont aux condition d'intégrabilité relatives au système (4), c'est-à-dire qu'étant donnés deux nombres i et k choisis parmi les nombres $2, 3, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\theta_i}{\partial u}\theta_k = \frac{\partial\theta_k}{\partial x_i} + \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\theta_i.$$

Nous allons calculer l'une de ces expressions, la première par exemple, et montrer qu'elle se transforme en elle-même par permutation de i et k. La relation précédente en résultera immédiatement. Nous avons déjà calculé $\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}$, calculons $\frac{\partial\theta_i}{\partial u}\cdot$ On a, d'après (5),

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\theta_i}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot$$

Formons l'expression $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} + \theta_k\frac{\partial\theta_i}{\partial u}\right)\cdot$ Elle est égale, d'après (6) et (9), à

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}\\ &\qquad + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\theta_k - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\theta_k.\end{aligned}\right.$$

Le terme $-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, qui est symétrique en i et k, se transforme en lui-même quand on permute i et k, nous pouvons le supprimer; il en est de même pour le terme $\left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\theta_k$, qui s'écrit encore

$$\frac{\left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(f_k - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}.$$

Les deux termes $\left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}$ et $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\theta_k$ se transforment l'un dans l'autre quand on permute i et k, leur somme ne change pas; par conséquent, nous pouvons les supprimer. Il reste l'expression

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\theta_k.$$

Remplaçons dans cette expression $\theta_k\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ par sa valeur $f_k - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\cdot$ Il nous reste, après réduction,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}f_k\right),$$

expression qui, d'après (3), se transforme en elle-même par permutation de i et k. La proposition est démontrée.

354. Le système (4) satisfait donc aux mêmes conditions que (2).

On opérera sur lui comme sur le système (2) et l'on aura successivement (en mettant z_1 au lieu de u)

$$\begin{aligned}
z &= \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1),\\
z_1 &= \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, z_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{n-2} &= \varphi_{n-2}(x_{n-1}, x_n, z_{n-1}),\\
z_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_n, c),
\end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire. z_{n-1} étant connu, on aura successivement $z_{n-2}, \ldots, z_1$ et finalement z en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans la pratique, il est inutile de vérifier d'avance si les conditions d'intégrabilité sont remplies. Si x_1 disparaît des équations analogues à (4), si x_2 disparaît des équations suivantes et ainsi de suite, c'est que le problème est possible. On le reconnaît ainsi en même temps qu'on obtient la solution. S'il n'en est pas ainsi, c'est que les conditions d'intégrabilité ne sont pas vérifiées. Elles donnent lieu à certaines conditions auxquelles doit satisfaire z.

355. Prenons comme exemple l'équation

$$du = 2xz\,dx + 2y\,dy + \frac{u - y^2}{z}\,dz.$$

Cette équation est équivalente au système

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u - y^2}{z}.$$

Considérons dans la première z comme un paramètre; on a, en intégrant,

$$u = zx^2 + \varphi,$$

φ étant une fonction inconnue de y, z. Calculons, en partant de cette valeur de u, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

En portant ces valeurs dans les deux autres équations, celles-ci deviennent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi - y^2}{z}.$$

x ayant disparu de ces équations, nous pouvons continuer l'applica-

tion de la méthode. On déduit de la première

$$\varphi = y^2 + \psi(z).$$

Nous allons déterminer $\psi(z)$ de façon que φ satisfasse à la dernière équation ; on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\varphi - y^2}{z} = \frac{\psi(z)}{z},$$

et, par intégration,

$$\psi(z) = cz,$$

c étant une constante arbitraire. On en déduit

$$\varphi = y^2 + cz$$

et finalement

$$u = x^2 z + y^2 + cz.$$

356. Le problème de l'intégration d'une différentielle totale peut se poser sous une forme un peu différente, d'une façon symétrique par rapport aux variables que l'on considère. On peut, par exemple, étant donnée l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

chercher s'il existe entre x, y, z une relation qui entraîne l'équation donnée. Cela revient à chercher si l'équation

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

est complètement intégrable. La condition d'intégrabilité est, pour cette équation,

$$\frac{\partial\left(-\frac{P}{R}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-\frac{P}{R}\right)}{\partial z}\left(-\frac{Q}{R}\right) = \frac{\partial\left(-\frac{Q}{R}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{Q}{R}\right)}{\partial z}\left(-\frac{P}{R}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &-R\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial R}{\partial y} + \left(R\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial R}{\partial z}\right)\frac{Q}{R} \\ &\qquad + R\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial R}{\partial x} - \left(R\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial R}{\partial z}\right)\frac{P}{R} = 0, \end{aligned}$$

ou, après réduction,

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

VII. — Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

357. *Méthode des caractéristiques.* — Soit une équation

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

z étant une fonction inconnue de $x_1, \ldots, x_n$, p_i étant égal à $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ et F étant une fonction donnée de toutes ces quantités. Nous allons d'abord étendre à cette équation la notion de *caractéristiques* que nous avons introduite dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires. Posons

$$p_{i,k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k};$$

F, en tant que fonction des $2n+1$ variables z, x et p, a, par rapport à ces variables, des dérivées partielles; nous poserons

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Z, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i.$$

Remarquons que, lorsque F est linéaire par rapport aux p, $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ n'est autre que le coefficient de p_i dans l'équation donnée, coefficient que nous avons désigné par P_i dans l'étude de ces équations. Nous avons été conduits à un système comprenant les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

Supposons qu'on connaisse une intégrale de (1), soit

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

La valeur correspondante de p_i est

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{2 bis}$$

t étant une variable auxiliaire, considérons le système

$$dt = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}, \tag{3}$$

en supposant que, dans les fonctions P_i, on remplace z par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et p_i par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Il y a, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un système de fonctions de t dont les différentielles satisfont à (3). Imaginons

que dans (2) et (2 *bis*) on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par ces fonctions; z et les p deviennent des fonctions de t; calculons leurs différentielles. Nous avons

$$dz = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum p_i \, dx_i = dt \sum P_i p_i,$$

$$dp_i = p_{i,1} \, dx_1 + \ldots + p_{i,n} \, dx_n = dt (P_1 p_{i,1} + \ldots + P_n p_{i,n}).$$

Dérivons par rapport à x_i l'équation (1), z étant supposé remplacé par φ et p_i par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les variables indépendantes. On a, F étant constamment nul,

$$Z p_i + X_i + P_1 p_{1,i} + P_2 p_{2,i} + \ldots + P_n p_{n,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ces relations, qui ont lieu, les x étant variables indépendantes, ont encore lieu si les x sont considérés comme fonctions d'une nouvelle variable. On déduit des deux dernières équations

$$dp_i = -dt (X_i + Z p_i).$$

Il en résulte que, quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions de t satisfaisant à (3), z étant défini par (2) et ses dérivées partielles par (2 *bis*), les $2n+1$ fonctions $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ de t vérifient le système

$$(4) \quad dt = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\Sigma P_i p_i} = -\frac{dp_1}{X_1 + Z p_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + Z p_n}.$$

Remarquons que ce système (4) peut être écrit, *a priori*, sans connaître la fonction φ, qui n'y entre pas d'une manière explicite.

Cela posé, soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un système de valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soient ζ la valeur qui en résulte pour $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, et π_i la valeur qui en résulte pour $p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Nous dirons, d'une façon générale, qu'un tel ensemble de valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n$ constitue un *élément de l'intégrale* φ.

Partons du système (3) dans lequel z serait remplacé, comme précédemment, par φ, et p_i par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Il y a un système bien déterminé de fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de t satisfaisant à (3) et prenant pour $t = 0$ les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (ceci en supposant remplies certaines conditions précisées dans les théorèmes d'existence).

D'autre part, partons du système (4), considéré indépendamment de son origine, c'est-à-dire les différentes fonctions X, P, Z étant fonctions des $2n+1$ variables indépendantes x_i, z, p_i. Il y a, pour

ces variables, un système de fonctions de t satisfaisant à (4) et prenant pour $t=0$ les valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n$.

Or, du système (3), auquel on adjoint (2) et (2 *bis*), nous avons pu déduire le système (4). De plus, au système initial $t=0$, $x_1=\xi_1, \ldots, x_n=\xi_n$ correspondent pour $z, p_1, \ldots, p_n$ les valeurs ζ, $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Donc la solution de (4) déterminée par le système initial $t=0$, $x_i=\xi_i$, $z=\zeta$, $p_i=\pi_i$ est identique à la solution de (3) partant du système initial $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pour $t=0$, à laquelle on adjoint les équations (2) et (2 *bis*).

Or, le système (4) est, comme nous l'avons vu, indépendant de φ. Cela montre que deux intégrales $z=\varphi$, différentes, mais contenant le même élément $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, contiennent, par cela même, tous les éléments $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ constitués par les fonctions de t qui sont solutions de (4) et partent de $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ pour $t=0$.

On appelle *caractéristique* toute suite d'éléments x_i, z, p_i qui sont des fonctions de t satisfaisant à (4). On voit qu'*une caractéristique est déterminée par un seul élément* et qu'*une intégrale de* (1), *dès qu'elle contient un certain élément, contient par cela même tous les éléments de la caractéristique déterminée par cet élément.*

358. Donnons une forme géométrique à ces considérations, en prenant d'abord le cas de deux variables indépendantes x, y. Soient p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et à y. Un système de fonctions x, y, z d'un paramètre t définit une courbe. En chaque point de cette courbe, considérons le plan d'équation

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0.$$

Une intégrale $z=\varphi(x,y)$ de l'équation donnée est représentée par une surface dont le plan tangent au point (x,y,z) est le plan précédent. Les résultats obtenus dans le cas général s'interprètent ainsi :

Une surface intégrale qui renferme l'élément $(\xi, \eta, \zeta, \pi, \chi)$ contient par cela même tous les éléments de la caractéristique définie par ce point, c'est-à-dire qu'elle contient tous les points de la courbe caractéristique et est tangente en chacun de ces points à un certain plan dont la position ne dépend que de l'équation aux dérivées partielles données.

En adoptant le même langage géométrique pour n variables, nous dirons que, dans l'espace à $n+1$ dimensions, une caractéristique est constituée par une courbe décrite par le point $(x_1, \ldots, x_n, z)$ dont les coordonnées sont fonctions d'un paramètre t, un certain plan étant attaché, en outre, à chaque point de la courbe, à savoir : le plan d'équation

$$p_1(X_1 - x_1) + \ldots + p_n(X_n - x_n) - (Z - z) = 0.$$

359. Cela étant, toute intégrale de (1) est constituée par un système de caractéristiques. Or, dans l'intégrale, il y a n variables indépendantes, tandis que dans une caractéristique il n'y a qu'une variable indépendante. On doit donc, pour former une intégrale, chercher à faire varier une caractéristique en fonction de $n-1$ paramètres.

Une caractéristique est déterminée par un de ses éléments, soit ξ_i, ζ, π_i. Prenons pour ξ_i, ζ, π_i des fonctions de $n-1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, et désignons par x_i, z, p_i les intégrales du système (4) qui partent de l'élément initial

$$t = 0, \qquad x_i = \xi_i, \qquad z = \zeta, \qquad p_i = \pi_i.$$

x_i, z, p_i sont, dans ces conditions, des fonctions de n variables indépendantes, savoir : $t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Pour que ces $2n+1$ fonctions x_i, z, p_i constituent une solution de (1), il faut et il suffit que, si l'on change de variables indépendantes en remplaçant $t, u_1, \ldots, u_{n-1}$ par les x, z devienne une fonction des x qui satisfasse à l'équation (1) et dont la dérivée partielle par rapport à x_i soit p_i. On peut exprimer ces deux conditions sans faire le changement de variables, en exprimant que :

1° Les fonctions de $t, u_1, \ldots, u_{n-1}$ obtenues pour x_i, z, p_i satisfont à (1);

2° Les différentielles de ces fonctions sont liées par la relation

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0.$$

Cette relation exprime bien, en effet, que z a pour dérivée p_i par rapport à x_i.

360. Occupons-nous d'abord de la première condition. Remarquons que le premier membre de (1), en tant que fonction des $2n+1$ variables indépendantes x_i, z, p_i, constitue une intégrale première du système (4). La différentielle de cette fonction est, en

effet,

$$Z\,dz + \Sigma X_i\,dx_i + \Sigma P_i\,dp_i$$

ou, en remplaçant dz, dx_i, dp_i par des quantités proportionnelles tirées de (4),

$$Z\,\Sigma P_i p_i + \Sigma X_i P_i - \Sigma P_i(X_i + Z p_i),$$

c'est-à-dire o. Par conséquent, F reste constant lorsque x_i, z, p_i varient en satisfaisant à (4). On a, en particulier,

$$F(z, x_i, p_i) = F(\zeta, \xi_i, \pi_i).$$

Pour que la première condition soit vérifiée, il est donc nécessaire et suffisant de prendre pour ζ, ξ_i, π_i des fonctions de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant à l'équation

$$F(\zeta, \xi_i, \pi_i) = 0.$$

361. Cherchons maintenant à réaliser la deuxième condition, c'est-à-dire à vérifier la relation

$$dz - \Sigma p_i\,dx_i = 0,$$

les variables indépendantes étant $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, t$.

Si l'on exprime ces différentielles dz et dx_i en fonction de t et des u, on devra annuler, dans le premier membre, les coefficients de dt, $du_1, \ldots, du_{n-1}$, ce qui donne d'abord la relation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

puis $(n-1)$ relations de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0,$$

où u est remplacé par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

L'équation (5) est vérifiée, car on a, d'après (4),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Sigma P_i p_i, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial t} = P_i.$$

Pour chacune des autres équations, posons

$$\Lambda = \frac{\partial z}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u};$$

A doit être nul. Calculons $\frac{\partial A}{\partial t}$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial t} - \sum \frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial t}.$$

En dérivant (5), on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial t} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial t}.$$

En portant cette valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial t}$ dans $\frac{\partial A}{\partial t}$, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right).$$

Remplaçons $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ par P_i et $\frac{\partial p_i}{\partial t}$ par $-(X_i + Zp_i)$; il vient

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum \left[P_i \frac{\partial p_i}{\partial u} + (X_i + Zp_i)\frac{\partial x_i}{\partial u}\right].$$

Dérivons par rapport à u l'équation (1) que l'on suppose vérifiée (n° 360); nous avons

$$Z\frac{\partial z}{\partial u} + \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial u} + \sum P_i \frac{\partial p_i}{\partial u} = 0,$$

de sorte que nous pouvons mettre $\frac{\partial A}{\partial t}$ sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial t} = Z\left(-\frac{\partial z}{\partial u} + \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right).$$

Cela montre que l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -Z.A.$$

En intégrant cette équation différentielle, t étant la seule variable (les u recevant des valeurs constantes), on obtient

$$A(t) = A(0)e^{-\int_0^t Z\,dt},$$

de sorte que, pour que A soit nul quel que soit t, il faut et il suffit que A(o) soit nul. Or, pour $t = 0$, x_i, z, p_i prennent les valeurs ξ_i, ζ, π_i; par conséquent, on devra choisir pour ξ_i, ζ, π_i des fonctions

de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant aux $n-1$ relations

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \sum \pi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0.$$

En résumé, *si l'on construit les courbes caractéristiques de* (4), *on aura une intégrale de* (1) *en prenant pour élément initial d'une caractéristique des fonctions* ξ_i, ζ, π_i *de* $n-1$ *variables* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *vérifiant les* n *relations*

$$(6) \quad \begin{cases} F(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_h} - \sum \pi_i \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

La solution de (4) *qui part du système initial* ξ_i, ζ, π_i *constitue une solution de* (1).

362. Indiquons deux solutions particulières du système (6). Supposons en premier lieu qu'on demande de trouver une intégrale de (1) qui, pour $x_1 = \xi_1$, se réduise à une fonction donnée des autres variables, soit $\psi(x_2, \ldots, x_n)$; cette question constitue le *problème de Cauchy*. Il faut que l'on ait

$$z(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Cherchons à satisfaire aux équations (6) en faisant jouer le rôle de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ à $\xi_2, \ldots, \xi_n$. La première équation ne change pas de forme; les $n-1$ autres deviennent

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} - \pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} - \pi_2 = 0,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_3} - \pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_3} - \pi_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_n} - \pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_n} - \pi_n = 0.$$

Nous satisferons à ces équations en prenant

$$\xi_1 = \text{const.}, \qquad \zeta = \psi(\xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad \pi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \qquad \ldots, \qquad \pi_n = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n},$$

et en considérant π_1 comme étant la fonction définie par l'équation

$$F(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0,$$

équation qui peut être résolue par rapport à π_1, pourvu que P_1 soit différent de o.

Dans ces conditions, le système (4) définit pour x_i, z, p_i des fonctions de $\xi_2, \ldots, \xi_n, t$ satisfaisant à l'équation (1). Pour $t = 0$, on a $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$, $z = \zeta$, de sorte que pour $x_1 = \xi_1$ on a bien

$$z = \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Dans le cas de deux variables indépendantes x, y, le problème se pose ainsi : *Déterminer une surface intégrale en l'assujettissant à passer par une courbe donnée, située dans un plan parallèle au plan des yz*. Soient

$$x = \xi, \qquad z = \psi(y)$$

les équations de cette courbe. En désignant les valeurs initiales de x, y, z, p, q par ξ, η, ζ, π, χ, et considérant η comme un paramètre, les équations à vérifier sont ici

$$F(\zeta, \xi, \eta, \pi, \chi) = 0,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \pi \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - \chi = 0.$$

Nous prendrons comme solution de ces équations : ξ constant, $\zeta = \psi(\eta)$, $\chi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, π étant défini par la première équation.

363. On a une solution des équations (6) en prenant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \zeta$ constants; $\pi_1, \ldots, \pi_n$ seront liés par $F = 0$; on prendra $n - 1$ de ces dernières variables comme paramètres. La solution que l'on obtient ainsi contient $n + 1$ constantes arbitraires.

364. *Notion d'intégrale complète*. — Soit une équation

$$V(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{1}$$

z étant une fonction des x définie par cette équation, les a étant des paramètres en nombre égal au nombre des variables x. Dérivons cette équation par rapport à chacune des variables; nous avons, avec les notations habituelles, les n relations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Si l'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les $n - 1$ équations (1) et (2), on

obtient en général une équation, soit

$$(3)\qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Cette équation (3) constitue une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfait la fonction z définie par (1). On dit que cette fonction z est une *intégrale complète* de l'équation aux dérivées partielles (3). D'une façon générale, nous appellerons *intégrale complète* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre toute intégrale qui contient autant de paramètres qu'il y a de variables indépendantes.

Nous allons montrer que, si l'on connaît une intégrale complète de l'équation (3), on peut trouver toutes les intégrales de (3) par des opérations de dérivation et d'élimination. Intégrer (3), qui est le résultat de l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre (1) et (2), revient à trouver des fonctions $z, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant les équations (1) et (2). Or, les x étant variables indépendantes et $z, a_1, \ldots, a_n$ étant supposés remplacés par leurs valeurs en fonction des x, on déduit de (1) par différentiation

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial V}{\partial a_1}da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}da_n = 0.$$

En tenant compte de la valeur de dz et des relations (2), cette équation se réduit à

$$(5)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_1}da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}da_n = 0.$$

L'équation (5) est équivalente à (4) quand (1) et (2) sont vérifiées; (5) peut l'être de différentes manières :

1° En prenant

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Ces équations jointes à (1) et (2) forment un système de $2n+1$ équations qu'on peut résoudre par rapport à $z, a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n$. On a ainsi une fonction z de $x_1, \ldots, x_n$ dont les dérivées sont égales aux p, d'après (2), et qui constitue une solution ne renfermant rien d'arbitraire : c'est ce qu'on appelle une *solution singulière* de l'équation (3).

2° Si les dérivées $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ ne sont pas toutes nulles, (5) est une relation différentielle proprement dite. Il faut, pour qu'elle soit vérifiée,

que $a_1, \ldots, a_n$ soient liés par une relation au moins. Supposons, d'une façon générale, qu'il y ait, entre les a, k relations ($1 \leq k \leq n$), soient

$$(6)\qquad \begin{cases} f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Elles entraînent les k relations différentielles

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial a_n} da_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial a_n} da_n = 0. \end{cases}$$

(5) doit en être une conséquence, ce qui exige que le premier membre de (5) soit une combinaison linéaire des premiers membres de ces équations. Donc, il existe des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_n}. \end{cases}$$

Nous obtiendrons une solution de la manière suivante. Nous choisirons arbitrairement l'entier k, puis les fonctions $f_1, \ldots, f_k$. Cela étant, l'équation (1), les équations (2), les équations (6) et les équations (8) forment un système de $2n + k + 1$ relations qui déterminent les fonctions $z, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. En éliminant les a et les λ entre ces équations, on a en z une intégrale qui dépend des fonctions arbitraires $f_1, \ldots, f_k$.

Remarquons qu'on peut prendre $k = n$, ce qui revient à attribuer aux a des valeurs constantes; on retrouve comme intégrale l'intégrale complète dont on est parti.

365. Examinons en particulier le cas de deux variables indépendantes. Soit l'équation

$$(1)\qquad V(z, x, y, a, b) = 0,$$

a, b étant deux paramètres arbitraires. Avec les notations habituelles, les équations (2) sont

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{3}$$

le résultat de l'élimination de a et b entre (1) et (2). On dit que (1) définit pour z une intégrale complète de (3). Dire que (3) est vérifiée revient à dire qu'il existe pour z, a, b des fonctions de x, y vérifiant (1) et (2). Ces fonctions satisfont à l'équation obtenue en différentiant (1) :

$$\frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial a}da + \frac{\partial V}{\partial b}db = 0.$$

En tenant compte de (2), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial V}{\partial a}da + \frac{\partial V}{\partial b}db = 0. \tag{4}$$

On peut satisfaire à celle-ci en prenant

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

En joignant ces deux équations à (1) et en éliminant a et b entre les trois équations obtenues, on a une intégrale singulière de l'équation (3).

Si $\frac{\partial V}{\partial a}$ et $\frac{\partial V}{\partial b}$ ne sont pas tous deux nuls, la relation (4) montre qu'il existe une relation au moins entre a et b. Si l'on se donne deux relations entre a et b, cela revient à prendre a et b constants. On retrouve, comme intégrale de (3), l'intégrale complète définie par $V = 0$.

Si l'on se donne une relation seulement entre a et b, soit

$$b = \varphi(a),$$

l'application de la méthode générale montre que, pour avoir une intégrale, on doit éliminer a et b entre les trois équations

$$V(z, x, y, a, b) = 0,$$
$$b = \varphi(a),$$
$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0.$$

L'intégrale qu'on obtient ainsi dépend de la relation arbitraire introduite entre a et b.

366. En résumé, la connaissance d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles permet d'obtenir les intégrales de cette équation. Nous sommes donc conduits à la recherche des intégrales complètes. Remarquons que la méthode des caractéristiques permet de trouver des intégrales complètes, en prenant la solution indiquée au n° 363, p. 155.

On peut dans certains cas, étant donnée une équation, en apercevoir directement une intégrale complète. Prenons, par exemple, l'équation de Clairaut généralisée, qui est

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

f étant une fonction donnée. La fonction

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

satisfait à cette équation; c'est une intégrale complète, car elle dépend de n paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Considérons de même, dans le cas de deux variables x, y, l'équation

$$q = f(p).$$

La fonction $z = ax + yf(a) + b$, où a et b sont deux constantes arbitraires, est une intégrale complète. On a, en effet, pour cette fonction, $p = a$, $q = f(a) = f(p)$.

367. Nous allons indiquer, en nous bornant au cas de deux variables indépendantes x, y, une méthode pour la recherche d'une intégrale complète.

Supposons d'abord l'équation donnée résolue par rapport à l'une des dérivées partielles, soit

$$q = f(x, y, z, p). \tag{1}$$

Supposons qu'on puisse trouver pour p une fonction $\psi(x, y, z)$ dépendant d'une constante arbitraire a et telle que l'équation aux différentielles totales

$$dz = \psi\, dx + f(x, y, z, \psi)\, dy$$

soit complètement intégrable. En effectuant cette intégration, on introduit une nouvelle constante arbitraire et l'on obtient une fonction z de x, y renfermant deux constantes arbitraires et satisfaisant à (1) : c'est une intégrale complète de (1).

Donnons un exemple de cas où l'on peut apercevoir directement la fonction ψ; soit l'équation

$$q = f(p, y).$$

Posons $p = a$, il en résulte $q = f(a, y)$; l'équation

$$dz = a\,dx + f(a, y)\,dy$$

est intégrable et donne

$$z = ax + \int f(a, y)\,dy + b.$$

On a là une fonction dépendant de deux paramètres a, b et satisfaisant à l'équation donnée. C'est donc une intégrale complète de cette équation.

368. Revenons maintenant au cas de l'équation générale

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

et cherchons à appliquer la méthode précédente. Pour cela, nous chercherons à adjoindre à cette équation une équation de la forme

$$(2) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = a,$$

telle qu'en résolvant ces deux équations par rapport à p et q, on trouve, pour p et q, deux fonctions de x, y, z rendant complètement intégrable l'équation

$$(3) \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Il faut et il suffit pour cela (n° 350, p. 142) que l'on ait

$$(4) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial z} p = 0.$$

Dérivons les équations (1) et (2), les variables indépendantes étant x, y, z, tandis que p, q sont les fonctions de ces variables définies par ces équations (1) et (2). Soient X, Y, Z, P, Q les dérivées de F par rapport à x, y, z, p, q; X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1 les dérivées de Φ par rapport à x, y, z, p, q.

Nous avons, en dérivant (1) et (2) par rapport à z,

$$Z + P\,\frac{\partial p}{\partial z} + Q\,\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$Z_1 + P_1\,\frac{\partial p}{\partial z} + Q_1\,\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$Q_1 Z - Q Z_1 + (P Q_1 - Q P_1) \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$P_1 Z - P Z_1 + (P_1 Q - P Q_1) \frac{\partial q}{\partial z} = 0;$$

on obtient de même

$$Q_1 Y - Q Y_1 + (P Q_1 - Q P_1) \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$P_1 X - P X_1 + (P_1 Q - P Q_1) \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

On voit que la relation (4) se transforme en

$$Q_1 Y - Q Y_1 + q (Q_1 Z - Q Z_1) - (P_1 X - P X_1) - p (P_1 Z - P Z_1) = 0$$

(en supposant $P Q_1 - Q P_1 \neq 0$).

En groupant les termes en X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1, cette équation s'écrit

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (P p + Q q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + p Z) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + q Z) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour trouver une intégrale de cette équation linéaire, on est conduit, d'après la méthode générale, à considérer le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{P p + Q q} = -\frac{dp}{X + p Z} = -\frac{dq}{Y + q Z}.$$

C'est précisément le système auquel on est conduit par la méthode des caractéristiques, mais on l'utilise différemment. On en connaît une intégrale première, savoir : F; on cherche à en obtenir une seconde intégrale première Φ, telle que le système

$$F = 0, \qquad \Phi = a$$

puisse être résolu par rapport à p et q, soit

$$p = \psi(x, y, z), \qquad q = \psi_1(x, y, z).$$

L'équation

$$dz = \psi\, dx + \psi_1\, dy$$

peut être complètement intégrée et donne pour z une fonction de x, y renfermant deux constantes arbitraires et qui constitue pour l'équation donnée une intégrale complète.

369. Traitons un exemple. Soit l'équation

$$pq - z = 0.$$

Le système différentiel auxiliaire est le suivant :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

En égalant le deuxième et le quatrième rapport, on a

$$dy = dp, \qquad \text{d'où} \qquad p = y + a.$$

A cette intégrale première, résolue par rapport à p, joignons l'équation donnée, résolue par rapport à q, soit

$$q = \frac{z}{p} = \frac{z}{y + a}.$$

Nous avons à intégrer l'équation différentielle totale

$$dz = (y + a)\,dx + \frac{z}{y + a}\,dy,$$

ce qui revient à intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y + a}.$$

On déduit de la première équation, où l'on considère y comme un paramètre,

$$z = x(y + a) + \varphi(y),$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

La fonction φ doit donc satisfaire à l'équation

$$x + \varphi'(y) = \frac{x(y + a) + \varphi(y)}{y + a},$$

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1}{y + a},$$

d'où

$$\varphi(y) = b(y + a),$$

b étant une nouvelle constante arbitraire. La fonction

$$z = (x + b)(y + a)$$

est une intégrale complète de l'équation donnée. Pour avoir la solution générale, nous introduirons, entre a et b, une relation arbitraire,

soit

$$b = \psi(a),$$

et nous éliminerons a et b entre les trois équations

$$z - (x + b)(y + a) = 0,$$
$$\psi'(a)(y + a) - x + b = 0,$$
$$b = \psi(a),$$

ce qui revient à éliminer a entre les deux équations

$$z - [x + \psi(a)](y + a) = 0, \qquad \psi'(a)(y + a) + x - \psi(a) = 0.$$

370. Si l'on veut, pour la même équation, employer la méthode des caractéristiques, il faut intégrer complètement le système différentiel précédent. On en déduit d'abord

$$q = x + b, \qquad p = y + a, \qquad \frac{p}{q} = c.$$

Mettons en évidence un système de valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. Ces trois équations s'écrivent

$$(1) \qquad x - x_0 = q - q_0, \qquad y - y_0 = p - p_0, \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}.$$

D'ailleurs, des trois derniers rapports, on déduit

$$\frac{dz}{2pq} = \frac{q\,dp + p\,dq}{2pq},$$

d'où

$$dz = q\,dp + p\,dq,$$

d'où, en intégrant,

$$(2) \qquad z - z_0 = pq - p_0 q_0.$$

En joignant cette relation aux trois autres, nous avons une solution du système différentiel auxiliaire, et les quatre équations obtenues peuvent être considérées comme définissant une courbe caractéristique pour l'équation donnée.

Cela étant, résolvons le problème de Cauchy, c'est-à-dire cherchons une intégrale qui se réduise, pour $x = x_0$, à la fonction $z = \varphi(y)$. D'après la méthode générale (n°s 362, 363, p. 155), il faut prendre pour x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 des fonctions d'un paramètre u vérifiant les équations suivantes :

$$p_0 q_0 - z_0 = 0, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial u} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0.$$

Prenons y_0 comme paramètre u et x_0 fixe; la seconde équation se réduit à

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0 = 0.$$

Or, on doit avoir

$$z_0 = \varphi(y_0) = \varphi(u),$$

d'où

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = \varphi'(u).$$

Nous prendrons donc $q_0 = \varphi'(u)$; p_0 sera donné par la première équation, c'est-à-dire que l'on aura

$$p_0 = \frac{z_0}{q_0} = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}.$$

En résumé, on prend

$$x_0 = \text{const.}, \qquad y_0 = u, \qquad z_0 = \varphi(u), \qquad p_0 = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}, \qquad q_0 = \varphi'(u);$$

x, y, z, p, q sont donnés par les quatre équations (1), (2) en fonction de l'un d'entre eux et de x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, c'est-à-dire de u.

VIII. — Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

371. Il résulte de l'étude des équations du premier ordre que la recherche de l'intégrale générale peut toujours se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Il n'en est plus de même pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2. Dans ce cas, c'est par exception que l'on peut résoudre le problème. Nous avons vu quelques exemples d'équations aux dérivées partielles particulièrement simples que nous avons pu intégrer soit directement, soit par un changement de variables (t. I, p. 135).

Le plus souvent, on doit renoncer à chercher la solution générale d'une équation donnée et se borner à résoudre certains problèmes particuliers. On adjoint par exemple à l'équation donnée certaines conditions et l'on cherche une intégrale qui satisfasse à ces conditions.

Citons, dans cet ordre d'idées, le problème de Dirichlet : on se donne dans le plan une aire A ayant pour frontière une courbe C, on se donne en outre sur C une succession de valeurs formant une fonction continue, et l'on se propose de trouver une fonction f de deux variables réelles x, y définie en tous les points de A, y compris le

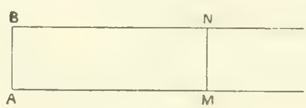
contour, se réduisant sur le contour à la fonction donnée et satisfaisant en tout point intérieur à A à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

372. Montrons par un exemple comment on peut trouver une fonction assujettie à satisfaire à une équation aux dérivées partielles et à certaines conditions supplémentaires. On étudie, en Acoustique, la question suivante : on a un tuyau cylindrique rempli d'air, fermé à une extrémité et considéré comme indéfini dans un sens (*fig.* 29); on imagine que l'on imprime à la tranche d'air AB, au moyen de la paroi, un certain mouvement, et l'on cherche la modification qui en résulte pour la colonne d'air contenue dans le tube.

Des considérations physiques conduisent au résultat suivant : soient MN une tranche d'air située à la distance x de AB, u son déplacement à l'instant t, compté positivement dans le sens AM; u est fonction des

Fig. 29.



deux variables t, x et satisfait à l'équation

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a étant une certaine constante positive.

Les conditions initiales, qui constituent les relations supplémentaires auxquelles doit satisfaire la fonction u cherchée, sont les suivantes :

1° A l'instant origine $t = 0$, la paroi et la colonne d'air sont au repos, c'est-à-dire que l'on a

(2) $$\left\{ \begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } t = 0,\ x \geq 0.$$

2° On imprime à la paroi ou à la tranche initiale, au moyen d'un piston, un mouvement dont la loi est donnée, c'est-à-dire que l'on a

(3) $$u = f(t) \quad \text{pour } x = 0,\ t \geq 0,$$

$f(t)$ étant une fonction donnée satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Cela posé, il résulte de l'équation aux dérivées partielles (1) que u est de la forme (*cf.* t. I, p. 136)

$$u = \varphi(x + at) + \varphi_1(x - at). \tag{4}$$

Nous allons déterminer les fonctions φ et φ_1 au moyen des conditions initiales (2) et (3). On a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x + at) - a\varphi'_1(x - at). \tag{5}$$

Pour $t = 0$, les équations (4) et (5) donnent

$$u = \varphi(x) + \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x) - a\varphi'_1(x),$$

d'où, en tenant compte des conditions (2),

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) + \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi'(x) - \varphi'_1(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad (x > 0).$$

La première relation donne, par dérivation,

$$\varphi'(x) + \varphi'_1(x) = 0,$$

d'où, en comparant avec la seconde,

$$\varphi'(x) = \varphi'_1(x) = 0.$$

On déduit de là, en désignant par c une certaine constante, les valeurs de φ et φ_1 pour des valeurs positives de l'argument :

$$\varphi(x) = c, \qquad \varphi_1(x) = -c \qquad (x \geqq 0). \tag{6}$$

Pour $x = 0$, on a, d'après (4),

$$u = \varphi(at) + \varphi_1(-at),$$

d'où, en tenant compte de la condition (3),

$$\varphi(at) + \varphi_1(-at) = f(t) \qquad (t \geq 0),$$

et, en tenant compte de la première équation (6),

$$\varphi_1(-at) = f(t) - \varphi(at) = f(t) - c.$$

Nous pouvons en déduire la valeur de la fonction φ_1 quand l'argu-

ment est négatif. Posons $-at = z$, il vient

$$\varphi_1(z) = f\left(-\frac{z}{a}\right) - c, \qquad \text{pour } z < 0.$$

Nous sommes à présent en mesure de résoudre le problème. La solution est la suivante :

Considérons la tranche MN d'abscisse x. Distinguons deux cas :

1° On a

$$t \leqq \frac{x}{a} \qquad \text{ou} \qquad x - at \geqq 0.$$

Les arguments de φ et de φ_1 sont tous deux positifs. On a

$$\varphi = c, \qquad \varphi_1 = -c,$$

d'où

$$u = 0.$$

La tranche MN est en repos.

2° On a

$$t > \frac{x}{a} \qquad \text{ou} \qquad x - at < 0.$$

On a toujours $\varphi = c$; mais, l'argument de φ_1 étant négatif, on a

$$\varphi_1(x - at) = f\left(-\frac{x - at}{a}\right) - c = f\left(t - \frac{x}{a}\right) - c,$$

d'où

$$u = c + f\left(t - \frac{x}{a}\right) - c = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

On voit que, si l'on considère une tranche déterminée d'abscisse x, tant que $t \leqq \frac{x}{a}$, cette tranche reste immobile; quand $t > \frac{x}{a}$, son déplacement est $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$. Cela correspond à ce fait physique que le déplacement imprimé à la tranche initiale se transmet intégralement aux tranches suivantes avec une vitesse égale à a.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

I. — Enveloppes des courbes et surfaces.

373. Dans un système de coordonnées cartésiennes x, y, z, un système de trois équations de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

où t est un paramètre, définit une *courbe*.

Une équation entre x, y, z de la forme

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une *surface*. Un système de trois relations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

où u, v sont deux paramètres, représente aussi une surface.

On sait que la *tangente* à la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

au point de paramètre t, a pour équations

$$\frac{X - f(t)}{f'(t)} = \frac{Y - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi'(t)},$$

en supposant que f', φ', ψ' ne sont pas nuls tous trois. On doit examiner à part le cas de $f' = \varphi' = \psi' = 0$. Il peut y avoir en un tel point, suivant les cas, une tangente déterminée ou non.

Les équations de la tangente s'écrivent encore

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

car dx, dy, dz sont proportionnels à $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$.

Le *plan normal* à la courbe au point de paramètre t a pour équa-

tion, si les coordonnées sont rectangulaires,

$$(X - x)f'(t) + (Y - y)\varphi'(t) + (Z - z)\psi'(t) = 0$$

ou

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

Considérons maintenant une surface ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et une courbe tracée sur cette surface. Les coordonnées x, y, z d'un point de cette courbe varient en satisfaisant toujours à l'équation de la surface. Leurs différentielles, si elles existent, sont donc liées par la relation

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0.$$

Cela montre que la tangente à la courbe en un point est toujours située dans le plan d'équation

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0.$$

C'est le *plan tangent* à la surface en ce point.

Dans le cas où f'_x, f'_y, f'_z sont nuls, on a, en général, un *point singulier*.

La *normale* à la surface en un point est (en coordonnées rectangulaires) la droite d'équations

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{f'_z}.$$

Dans le cas particulier où l'équation de la surface est résolue par rapport à l'une des variables, soit

$$z = \varphi(x, y),$$

l'équation du plan tangent prend la forme

$$(X - x)\varphi'_x + (Y - y)\varphi'_y - (Z - z) = 0.$$

Si l'on considère une courbe plane d'équation $f(x, y) = 0$, la tangente au point x, y a pour équation

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0.$$

Ces différents points étant rappelés, nous allons étudier la théorie des enveloppes.

374. *Enveloppe d'une courbe plane.* — Considérons une famille

de courbes planes dépendant d'un paramètre a, ayant pour équation

$$f(x, y, a) = 0. \tag{1}$$

Prenons deux courbes de cette famille correspondant aux valeurs a et $a + \Delta a$ du paramètre :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, a) = 0, \\ f(x, y, a + \Delta a) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Elles peuvent avoir des points communs dont les coordonnées satisfont alors aux équations (2) et, par suite, à l'équation

$$\frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0, \tag{3}$$

qui est une combinaison des équations (2).

D'après la formule des accroissements finis, cette équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a + \theta \Delta a) = 0,$$

θ étant variable avec x, y, a, mais toujours compris entre 0 et 1 ; et, d'après la théorie des fonctions implicites, si Δa varie d'une manière continue, les coordonnées x, y d'un point commun aux deux courbes varieront d'une manière continue, ceci sous certaines conditions précisées dans la théorie des fonctions implicites. Quand Δa tend vers 0, les points communs tendent vers les points communs aux deux courbes

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0 ; \end{array}\right. \tag{4}$$

ceux-ci sont dits *points limites* pour la courbe (1). Quand a varie, ils ont un lieu géométrique dont l'équation s'obtient en éliminant a entre les équations (4). Ce lieu s'appelle l'*enveloppe* de la famille de courbes donnée.

Soient

$$R(x, y) = 0$$

son équation, et (x_0, y_0) un de ses points.

Les équations (4), où l'on remplace x, y par x_0, y_0, ont au moins une racine commune en a, soit a_0. Il y a pour x et y des fonctions continues de a satisfaisant à (4) et se réduisant à x_0, y_0 quand a se réduit à a_0. Si l'on suppose que l'on remplace x, y par ces fonc-

tions dans (1), le premier membre sera identiquement nul, ainsi que toutes ses dérivées, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

ce qui donne, d'après (4),

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}=0.$$

Si, pour le point considéré, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas tous deux nuls, cette équation montre que la tangente au lieu décrit par x, y, de coefficients $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, est identique à la tangente à la courbe (1) qui passe par ce point. Le fait n'a plus lieu si (x_0, y_0) est un point singulier pour la courbe (1) de paramètre a_0.

375. Cherchons directement si, étant donnée la famille de courbes (1), il existe une courbe tangente à toutes les courbes de cette famille, le point de contact variant d'une manière continue avec a.

Soient x, y les coordonnées de ce point de contact inconnu. La tangente au lieu de ce point a pour coefficients $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$ et, comme elle doit coïncider avec la tangente à la courbe (1) en ce point, on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}=0.$$

De plus, x, y, fonctions de a, vérifient l'équation (1); on en déduit en dérivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

En comparant ces deux équations, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

de sorte que, si le problème est possible, tout point du lieu satisfait à l'équation $R(x, y)=0$ obtenue en éliminant a entre les équations (4).

376. Remarquons que, s'il y a un point singulier dans chaque courbe de la famille (1), le lieu de ce point fait partie de l'enveloppe.

En effet, ses coordonnées satisfont aux équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et par suite aussi à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Prenons comme exemple la courbe ayant pour équation

$$f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0,$$

a étant un paramètre variable. On a

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a).$$

L'élimination de a donne l'équation

$$y^2(y^2 - 1) = 0,$$

qui se décompose en

$$y^2 = 0, \qquad y = \pm 1.$$

Or, la courbe mobile est une courbe se déplaçant parallèlement à l'axe des x et ayant pour point double le point $x = a$, $y = 0$.

L'axe des x est donc un lieu de points singuliers, de sorte que l'enveloppe proprement dite se compose simplement des droites $y = \pm 1$.

377. Supposons maintenant que les courbes variables aient pour équation

$$f(x, y, a, b) = 0,$$

a et b étant deux paramètres liés par la relation

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Considérons b comme une fonction de a définie par cette relation et dérivons par rapport à a la première équation. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

D'ailleurs, de la relation entre a et b on déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

On peut tirer de là la valeur de $\frac{db}{da}$. En portant cette valeur dans la relation précédente, celle-ci se met sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} \end{vmatrix} = 0.$$

On doit, pour avoir l'équation de l'enveloppe, éliminer a et b entre cette relation et les équations

$$f(x, y, a, b) = 0, \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

378. *Remarques.* — 1° Étant donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre, si celui-ci entre linéairement dans l'équation des courbes, il n'y a pas d'enveloppe. En effet, l'équation de ces courbes est de la forme

$$f_1 + af_2 = 0.$$

Deux quelconques de ces courbes se coupent en des points fixes, communs à toutes les courbes de la famille; le lieu des points limites se réduit à ces points eux-mêmes.

2° Si le paramètre entre algébriquement dans l'équation des courbes, c'est-à-dire si celle-ci est de la forme

$$f_0 a^m + f_1 a^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

pour trouver l'enveloppe, on reconnaît que l'on est ramené à éliminer a entre les dérivées de cette équation par rapport à a et par rapport à une variable d'homogénéité b obtenue en remplaçant a par $\frac{a}{b}$ et multipliant ensuite les deux membres de l'équation par b^m.

379. *Enveloppe d'une surface dépendant d'un paramètre.* — Soit une surface dépendant d'un paramètre a et ayant pour équation

$$f(x, y, z, a) = 0. \tag{1}$$

Deux surfaces de cette famille correspondant aux valeurs a et $a + \Delta a$ du paramètre ont en commun une courbe qui varie quand Δa tend vers o. On peut prendre pour équations de cette courbe

$$f(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{f(x, y, z, a + \Delta a) - f(x, y, z, a)}{\Delta a} = 0.$$

Quand Δa tend vers o, cette courbe tend vers une courbe limite qui a pour équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0. \tag{2}$$

C'est la *courbe caractéristique* de la surface considérée, et son lieu, quand a varie, est dit l'*enveloppe* de cette surface. En éliminant a entre les équations (1) et (2), on a son équation :

$$R(x, y, z) = 0.$$

Si un point (x, y, z) se déplace en restant sur l'enveloppe, à chaque système de valeurs de x, y, z on peut associer une valeur de a telle que le système x, y, z, a satisfasse aux équations (1) et (2), par suite à l'équation obtenue en différentiant (1), c'est-à-dire à

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0.$$

En tenant compte de (2), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0. \tag{3}$$

Cette équation montre que le plan tangent à l'enveloppe au point (x, y, z) est le même que le plan tangent en ce point à la surface (1).

380. Réciproquement, étant donnée la famille de surfaces (1), cherchons s'il existe une surface tangente à chaque surface (1), les coordonnées (x, y, z) d'un point de contact étant fonctions de deux paramètres dont l'un sera a. A tout système de coordonnées (x, y, z) d'un tel point correspondra un nombre a tel que le système x, y, z, a vérifie l'équation (1) et qu'en outre le plan tangent au lieu du point (x, y, z) soit confondu avec le plan tangent à (1). Cela exige que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

D'autre part, on déduit de (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0;$$

d'où, par comparaison de ces deux relations,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

La surface cherchée, si elle existe, ne peut donc être que l'enveloppe des surfaces (1).

Les résultats du n° 377 s'appliquent au cas des surfaces dépendant de deux paramètres liés par une relation.

381. *Enveloppe d'une surface dépendant de deux paramètres.* — Soit

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface dépendant de deux paramètres indépendants a, b. Considérons deux surfaces de cette famille correspondant, l'une à a, b, l'autre aux valeurs $a + \Delta a$, $b + \Delta b$ des paramètres; la seconde a pour équation

$$f(x, y, z, a + \Delta a, b + \Delta b) = 0. \tag{2}$$

Ces deux surfaces se coupent suivant une certaine courbe; si Δa et Δb tendent vers 0 d'une manière quelconque, parmi les points de cette courbe, il y en a qui tendent vers des positions limites bien déterminées qui sont les points d'intersection des trois surfaces

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, z, a, b) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a, b) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial b}(x, y, z, a, b) = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces points s'appellent les *points limites*, et leur lieu, lorsque a et b varient, est encore dit l'*enveloppe* des surfaces (1).

Un point limite (x, y, z) a des coordonnées variant d'une façon continue avec a, b; l'équation (1), qui est identiquement vérifiée par ce système de valeurs de x, y, z, donne par différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0, \tag{4}$$

d'où résulte, en tenant compte de (3), la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

qui montre que le plan tangent à l'enveloppe au point (x, y, z) est le même que le plan tangent en ce point à la surface variable.

382. Réciproquement, étant donnée la famille de surfaces (1), cherchons s'il existe une surface tangente à toutes les surfaces de cette famille. Si cela est, les coordonnées x, y, z d'un point de contact seront des fonctions de a, b telles que l'on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Or, de (1) on déduit encore par différentiation la relation (4). Il en résulte, par comparaison avec la relation précédente,

$$\frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0.$$

Ceci, devant avoir lieu quels que soient a et b, exige

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

La surface cherchée, si elle existe, coïncide donc avec l'enveloppe.

Nous nous sommes placés dans le cas général; il peut arriver que les points limites soient fixes, ou encore que le lieu des points limites soit une courbe.

383. *Enveloppes des courbes gauches.* — Considérons une courbe gauche C définie comme intersection de deux surfaces dépendant d'un paramètre a

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a) = 0. \end{cases}$$

Cherchons s'il existe une courbe Γ tangente à toutes les courbes C, le point de contact variant d'une manière continue avec a.

Les coordonnées x, y, z du point de contact d'une telle courbe, si elle existe, seront fonctions continues de a, satisferont aux équations (1) et par suite à

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial a}da = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}da = 0. \end{cases}$$

Pour que Γ et C soient tangentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{da}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{da}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{da}=0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{dx}{da}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{da}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{dz}{da}=0, \end{cases}$$

d'où, par comparaison avec (2),

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a}=0.$$

Un point (x, y, z) de l'enveloppe Γ, si elle existe, satisfait donc aux équations

$$(5)\quad \begin{cases} f(x,y,z,a)=0, & \varphi(x,y,z,a)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}=0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}=0. \end{cases}$$

Il faut que ces quatre équations définissent des fonctions x, y, z de a; cette condition, qui est nécessaire pour que Γ existe, est d'ailleurs suffisante, car le point de coordonnées x, y, z que l'on déduit de ces relations satisfait à (2) et par suite à (3), donc décrit une courbe tangente à C. Mais, en général, ces quatre équations ne sont pas compatibles, de sorte qu'*en général une courbe gauche n'a pas d'enveloppe*.

384. *Remarques.* — Si l'une des équations (1) ne dépend pas de a, c'est-à-dire si l'une des surfaces qui définissent la courbe est fixe les équations (4) se réduisent à une; on n'a plus que trois équations qui définissent en général x, y, z en fonction de a. La courbe variable a une enveloppe.

385. Revenons à la courbe ayant pour équations

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,y,z,a)=0, \\ \varphi(x,y,z,a)=0. \end{cases}$$

Quand a varie, elle décrit une surface dont on trouve l'équation en éliminant a entre (1), soit

$$R(x, y, z)=0.$$

D'après la remarque précédente, la courbe ayant pour équations

$$(2)\quad \begin{cases} R(x,y,z)=0, \\ f(x,y,z,a)=0 \end{cases}$$

a une enveloppe. Cette contradiction apparente tient à ce fait que le système (1) n'est pas complètement équivalent au système (2); la courbe (2) contient en général la courbe (1) plus d'autres courbes.

386. Considérons une surface dépendant d'un paramètre

$$f(x, y, z, a) = 0.$$

Elle a une enveloppe définie comme lieu de la caractéristique

$$f(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

Cette caractéristique est une courbe qui a une enveloppe. En effet, en appliquant la théorie, on doit prendre les quatre équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0.$$

On voit qu'elles se réduisent à trois et par suite qu'elles définissent x, y, z en fonction de a.

387. *Enveloppe de plans à un paramètre.* — Considérons un plan variable

$$(1) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0,$$

A, B, C, D étant fonctions d'un paramètre. Lorsque ce paramètre varie, le plan a une enveloppe. Sa caractéristique est définie par l'équation (1) et par

$$(2) \qquad \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D}' = 0,$$

A′, B′, C′, D′ étant les dérivées de A, B, C, D par rapport au paramètre.

D'après le n° 386, cette droite, en tant que caractéristique, a une enveloppe qui est le lieu du point dont les coordonnées sont définies par les équations (1), (2) et l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}''x + \mathrm{B}''y + \mathrm{C}''z + \mathrm{D}'' = 0.$$

La surface engendrée par la droite, c'est-à-dire l'enveloppe du

plan, est dite *surface développable*. Le lieu du point de contact de la caractéristique avec son enveloppe est dit l'*arête de rebroussement* de la développable [1].

II. — Courbure et torsion des courbes gauches.

388. *Plan osculateur.* — Considérons une courbe gauche ayant pour équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Considérons la tangente MT au point $M(x, y, z)$ de paramètre t :

$$\frac{X-x}{f'(t)} = \frac{Y-y}{\varphi'(t)} = \frac{Z-z}{\psi'(t)}.$$

Soit M' un point voisin de M, correspondant à la valeur $t+\Delta t$ du paramètre. Menons par M la parallèle $M\theta$ à la tangente en M' ; l'équation du plan défini par MT, $M\theta$ est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'(t+\Delta t) & \varphi'(t+\Delta t) & \psi'(t+\Delta t) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \dfrac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t} & \dfrac{\varphi'(t+\Delta t)-\varphi'(t)}{\Delta t} & \dfrac{\psi'(t+\Delta t)-\psi'(t)}{\Delta t} \end{vmatrix} = 0.$$

Si Δt tend vers o, les éléments de la dernière ligne de ce déterminant tendent vers

$$f''(t) \quad \varphi''(t) \quad \psi''(t),$$

de sorte que le plan $TM\theta$ varie en tendant vers une position limite déterminée qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan est dit le *plan osculateur* à la courbe en M. Son équation s'écrit

$$(1) \qquad (y'z''-z'y'')(X-x)+(z'x''-x'z'')(Y-y)+(x'y''-y'x'')(Z-z)=0.$$

---

[1] Ces dénominations seront justifiées plus loin (*voir* Section X).

Nous poserons

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Le plan est déterminé tant que A, B, C ne sont pas nuls tous les trois.

Ce plan dépend du paramètre t, il a donc une enveloppe. Je dis que *la caractéristique du plan osculateur à une courbe en un point est la tangente à cette courbe.* En effet, pour définir cette caractéristique, nous devons adjoindre à l'équation (1) l'équation dérivée par rapport à t, qui est, toutes réductions faites,

$$(2) \quad \begin{cases} (y'z''' - z'y''')(X - x) \\ \qquad + (z'x''' - x'z''')(Y - y) + (x'y''' - y'x''')(Z - z) = 0; \end{cases}$$

c'est une droite passant par M. De plus, si l'on remplace dans ses équations $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ par x', y', z' qui sont les coefficients de la tangente, elles sont vérifiées. C'est donc la tangente en M.

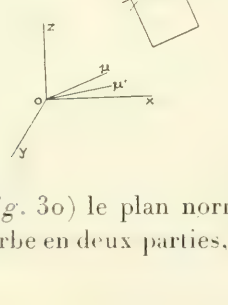
On voit que le lieu des tangentes à une courbe gauche C est une surface enveloppe d'un certain plan à un paramètre, par conséquent, d'après le n° 387, une surface *développable*.

Toute droite menée par M dans le plan normal est une *normale* à la courbe. On appelle *normale principale* la normale située dans le plan osculateur; on appelle *binormale* la normale perpendiculaire au plan osculateur.

389. Considérons une courbe rapportée à trois axes *rectangulaires* Ox, y, z. D'après la définition de la longueur d'un arc de courbe (t. I, p. 146), on a, s étant l'arc compté positivement dans le sens des t croissants,

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Fig. 30.



Considérons en M (*fig.* 30) le plan normal à la courbe. Il divise au voisinage de M la courbe en deux parties, situées de part et d'autre

par rapport à lui, et la tangente en deux demi-droites. Considérons la demi-tangente qui est du même côté par rapport au plan normal que l'arc de courbe partant de M dans le sens des t croissants. Nous dirons que c'est la *demi-tangente dirigée dans le sens positif* ou la *demi-tangente positive*. Soient α, β, γ ses cosinus directeurs, on a

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \pm\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \pm\frac{1}{s'}.$$

Supposons par exemple $x' > 0$, cela veut dire que x croît avec t. Si nous menons par M le plan parallèle au plan yOz, la demi-tangente dirigée dans le sens des t croissants est donc par rapport à ce plan du même côté que la partie positive de l'axe Ox; l'angle de cette demi-tangente avec Ox est donc aigu, par suite α est positif. Cela montre que devant le dernier rapport il faut prendre le signe $+$, de sorte que l'on a

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{s'}$$

ou

$$\alpha = \frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{z'}{s'} = \frac{dz}{ds}.$$

390. *Courbure*. — Soient M un point de la courbe, M' un point voisin, ω l'angle des tangentes à la courbe en M et M', la détermination choisie pour cet angle étant celle qui tend vers o quand M' tend vers M, son évaluation étant faite en parties de la circonférence de rayon 1. Considérons le rapport $\frac{\omega}{\text{arc } MM'}$; nous allons montrer que, quand M' tend vers M, ce rapport tend vers une limite déterminée qu'on appelle la *courbure* en M. L'inverse est dit le *rayon de courbure* en M.

Par l'origine des coordonnées, menons (*fig.* 30) un segment $O\mu$ de longueur 1 parallèle à la demi-tangente positive en M; cela revient à considérer le point μ de coordonnées α, β, γ. Lorsque M décrit la courbe donnée C, μ décrit sur la sphère de rayon 1 et de centre O une certaine courbe qu'on appelle l'*indicatrice sphérique*. Soit σ la longueur de l'arc de courbe décrit par le point μ à partir d'une origine quelconque, compté positivement dans le sens où μ décrit l'indicatrice lorsque s croît. Soit μ' le point de l'indicatrice correspondant à M', on a

$$\omega = \mu O \mu' = \text{arc de grand cercle } \mu\mu'.$$

Or, cet arc de grand cercle $\mu\mu'$ est un infiniment petit équivalent à

la corde $\mu\mu'$ et par suite à l'arc d'indicatrice $\mu\mu'$. Nous sommes donc ramenés à étudier la limite du rapport

$$\frac{\text{arc}\,\mu\mu'}{\text{arc}\,\text{MM}'} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}.$$

Quand Δt tend vers o, ce rapport a une limite qui est

$$\frac{\sigma'_t}{s'_t} \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma}{ds},$$

de sorte que la courbure en M est $\frac{d\sigma}{ds}$, le rayon de courbure $\frac{ds}{d\sigma}$. Calculons ces quantités en fonction des éléments qui définissent la courbe.

On a

$$\sigma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

De $\alpha = \frac{x'}{s'}$ on déduit

$$\alpha' = \frac{x''s' - x's''}{s'^2},$$

d'où

$$\sigma'^2 = \frac{\Sigma(x''s' - x's'')^2}{s'^4},$$

ou, en développant le second membre,

$$\sigma'^2 = \frac{s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) + s''^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2s's''(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{s'^4}.$$

Dérivons la relation

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

on obtient

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$

de sorte que nous pouvons écrire après simplification

$$\sigma'^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{s'^4},$$

ou, d'après l'identité de Lagrange,

$$\sigma'^2 = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{s'^4}.$$

En posant, comme précédemment,

$$\text{A} = y'z'' - z'y'', \qquad \text{B} = z'x'' - x'z'', \qquad \text{C} = x'y'' - y'x'',$$

nous aurons

$$\sigma'^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{s'^4},$$

d'où l'expression du rayon de courbure (quantité essentiellement positive) :

$$R = \frac{s'}{\sigma'} = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

391. Revenons à l'indicatrice sphérique. Le plan $\mu O \mu'$ a pour position limite, quand μ' tend vers μ, le plan mené par O parallèlement au plan osculateur en M, de sorte que la tangente en μ à l'indicatrice sphérique est en même temps perpendiculaire à $O\mu$ et parallèle au plan osculateur en M. Elle est donc parallèle à la normale principale en M. Choisissons sur elle et par suite sur la normale principale, comme direction positive, celle de la demi-tangente à l'indicatrice sphérique dirigée dans le sens des arcs σ croissants.

Remarquons que si l'on change le sens de parcours sur la courbe donnée, ce qui a pour effet de changer le sens de la direction positive de la tangente, chaque point μ est remplacé par son symétrique par rapport à O ; l'indicatrice est remplacée par la courbe symétrique par rapport à O. Comme on change aussi le sens de parcours sur cette courbe, on voit que la direction positive sur la normale principale reste la même. Donc, *sur la normale principale, la direction positive est indépendante du sens de parcours choisi sur la courbe donnée et, par suite, de la représentation paramétrique.*

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus des angles que fait cette direction avec les axes $Oxyz$. En appliquant à l'indicatrice sphérique les formules générales $\alpha = \frac{x'}{s'}, \cdots$, nous avons

$$\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\sigma'} = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \beta_1 = \frac{\beta'}{\sigma'} = \frac{d\beta}{d\sigma}, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma'}{\sigma'} = \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

d'où, en remplaçant $d\sigma$ par $\frac{ds}{R}$,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R}.$$

Ces formules constituent *le premier groupe de formules de Frenet.*

Cherchons à évaluer $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ en fonctions de x, y, z et de leurs

dérivées. On a, en remplaçant α' et σ' par leurs valeurs,

$$\alpha_1 = \frac{x''s' - x's''}{s'^2\sigma'} = \frac{x''s' - x's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\beta_1 = \frac{y''s' - y's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \gamma_1 = \frac{z''s' - z's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

392. *Enveloppe du plan normal à la courbe.* — Soit P le plan normal à la courbe au point M; il a pour équation

$$(1) \qquad \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0.$$

Quand M décrit la courbe, ce plan a une enveloppe. Sa caractéristique est définie par l'équation (1) jointe à l'équation dérivée

$$(2) \qquad \alpha'(X-x) + \beta'(Y-y) + \gamma'(Z-z) - (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') = 0.$$

Or, de $\alpha = \frac{x'}{s'}, \cdots$ on déduit

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{s'} = s'.$$

L'équation (2) s'écrit donc

$$\alpha'(X-x) + \beta'(Y-y) + \gamma'(Z-z) - s' = 0,$$

c'est-à-dire, comme $\frac{\alpha'}{s'} = \frac{\alpha_1}{R}, \cdots,$

$$(Q) \qquad \alpha_1(X-x) + \beta_1(Y-y) + \gamma_1(Z-z) - R = 0.$$

Le plan Q, que représente cette équation, est, comme on voit, perpendiculaire à la normale principale. Soient X, Y, Z les coordonnées du point où il la coupe. Posons

$$X = x + \alpha_1\rho, \qquad Y = y + \beta_1\rho, \qquad Z = z + \gamma_1\rho.$$

En portant ces valeurs dans l'équation de Q, on trouve

$$\rho = R.$$

Le plan Q est donc le plan perpendiculaire à la normale principale mené par le point C situé, sur la partie positive de cette droite, à la distance R du point M (*fig.* 31).

La caractéristique D *du plan normal*, qui est l'intersection des plans P et Q, *est* donc *la droite menée par* C *perpendiculairement au plan osculateur*. D est dite la *droite polaire* et C le *centre de courbure*.

Le lieu de D est la *surface polaire*.

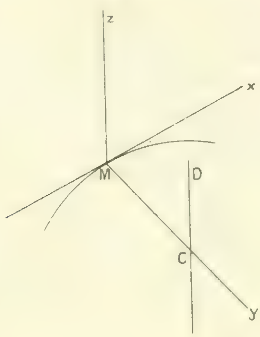
On peut calculer les coordonnées de C; en nous servant de $X = x + \alpha_1 R$, il vient

$$X = x + \frac{s'^3}{A^2 + B^2 + C^2}(x''s' - x's'') = x + \frac{s'^2(x''s'^2 - x's's'')}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On reconnaît, en ayant égard aux valeurs de s'^2 et $s's''$ (n° 390), que *ces coordonnées s'expriment rationnellement en fonction des dérivées premières et secondes de x, y, z.*

393. Étudions la position de la courbe par rapport aux éléments qui ont été définis. Transportons l'origine au point M; prenons pour axe des X la demi-tangente positive en M, pour axe des Y la normale principale (*fig.* 31). x, y, z s'expriment en fonctions linéaires

Fig. 31.



de X, Y, Z, x', y', z' en fonctions linéaires de X′, Y′, Z′, et x'', y'', z'' en fonctions linéaires de X″, Y″, Z″.

On doit avoir, dans le nouveau système,

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

d'où

$$(X')_M > 0, \qquad (Y')_M = (Z')_M = 0, \qquad A = (Y'Z'' - Z'Y'')_M = 0.$$

Pour que le plan XMY soit le plan osculateur, il faut de plus que l'on ait

$$B = (Z'X'' - X'Z'')_M = 0, \qquad C = (X'Y'' - Y'X'')_M \gtrless 0,$$

ce qui entraîne, d'après les conditions précédentes,

$$(Z'')_M = 0, \qquad (Y'')_M \gtrless 0.$$

Dans ces conditions, on a, la normale principale étant MY,

$\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, d'où

$$\beta_1 = \pm 1.$$

D'ailleurs on a (n° 391), comme A et B sont nuls,

$$\beta_1 = \frac{Y''s' - Y's''}{|C|} = \frac{Y''s'}{|C|}.$$

s' étant positif, β_1 a le signe de Y''. Si l'on prend pour axe MY la normale principale dirigée dans le sens positif, on doit donc avoir $(Y'')_M > 0$.

Cela étant, étudions la position de la courbe par rapport au plan ZMX, mené par la tangente perpendiculairement au plan osculateur. Au point M, on a $Y = Y' = 0$, $Y'' > 0$; donc Y a constamment le signe + au voisinage de M. Donc *la courbe, au voisinage de* M, *est, par rapport au plan* ZMX, *tout entière du côté du centre de courbure.*

Examinons maintenant sa position par rapport au plan osculateur XMY. $(Z')_M$ et $(Z'')_M$ sont nuls; Z''' est différent de 0 en M en général. Donc, au point M, Z change de signe en s'annulant: cela montre qu'en général *le plan osculateur traverse la courbe.*

Imaginons un observateur dirigé suivant la droite polaire D et regardant le point M. Il voit la courbe au voisinage de M aller de gauche à droite en montant, ou de droite à gauche en montant, le fait étant indépendant de la direction de l'observateur sur cette droite polaire. Il y a ainsi pour une courbe deux dispositions différentes qui sont dites dispositions *dextrorsum* et *sinistrorsum*.

394. *Torsion.* — De même que nous avons étudié l'angle de deux tangentes infiniment voisines, nous allons étudier l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, ou, ce qui revient au même, l'angle de deux binormales infiniment voisines.

Choisissons comme sens positif sur la binormale la direction telle que le trièdre formé par les directions positives de la tangente, de la normale principale et de la binormale soit direct, c'est-à-dire de même sens que le trièdre des coordonnées. On sait que dans ces conditions, si l'on appelle $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la direction positive sur la binormale, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$\alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1,$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{y'(z''s' - z's'') - z'(y''s' - y's'')}{s'^3\sigma'} = \frac{A}{s'^2\sigma'};$$

de même, on a

$$\beta_2 = \frac{B}{s'^2\sigma'}, \qquad \gamma_2 = \frac{C}{s'^2\sigma'}.$$

Quand M parcourt la courbe donnée, le point ν de coordonnées α_2, β_2, γ_2 décrit une certaine courbe sur la sphère de centre O et de rayon 1. On reconnaît, comme précédemment (n° 390), que l'élément de l'arc de cette courbe est un infiniment petit équivalent à l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

De plus, *la tangente au lieu décrit par ν est parallèle à la normale principale en* M. Il suffit, pour le montrer, de prouver que cette direction, dont les paramètres directeurs sont proportionnels à $d\alpha_2$, $d\beta_2$, $d\gamma_2$, est perpendiculaire à la fois à la tangente MT et à la binormale en M, c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma\alpha\, d\alpha_2 = 0, \qquad \Sigma\alpha_2\, d\alpha_2 = 0.$$

La seconde relation est une conséquence immédiate de

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Pour démontrer la première, partons de la relation $\Sigma\alpha\alpha_2 = 0$; nous en déduisons par différentiation

$$\Sigma\alpha\, d\alpha_2 + \Sigma\alpha_2\, d\alpha = 0.$$

Remplaçons, dans $\Sigma\alpha_2\, d\alpha$, $d\alpha$ par $\frac{\alpha_1\, ds}{R}$, il vient

$$\Sigma\alpha_2\, d\alpha = \frac{ds}{R}\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

d'où

$$\Sigma\alpha\, d\alpha_2 = 0.$$

Cela étant, nous prendrons comme sens positif de parcours sur la courbe décrite par ν le sens correspondant à la direction positive de la normale principale. τ étant l'arc de cette courbe compté à partir d'une origine quelconque, on a, d'après cette définition,

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2'}{\tau'} = \frac{d\alpha_2}{d\tau}, \qquad \beta_1 = \frac{d\beta_2}{d\tau}, \qquad \gamma_1 = \frac{d\gamma_2}{d\tau}.$$

On appelle *torsion algébrique* le rapport algébrique $\frac{d\tau}{ds}$ ou $\frac{\tau'}{s'}$, et *rayon de torsion* T l'inverse de cette quantité.

Cherchons à évaluer T en fonction de x, y, z et de leurs dérivées. Tout revient à calculer τ'. Écrivons

$$\tau' = \frac{\alpha'_2}{\alpha_1} = \frac{\beta'_2}{\beta_1} = \frac{\gamma'_2}{\gamma_1} = \frac{\Sigma\alpha_1\alpha'_2}{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} = \Sigma\alpha_1\alpha'_2.$$

De la relation $\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0$ on déduit

$$\Sigma\alpha'_1\alpha_2 + \Sigma\alpha_1\alpha'_2 = 0,$$

d'où

$$\tau' = -\Sigma\alpha'_1\alpha_2,$$

et, en remplaçant α_2, β_2, γ_2 par leurs valeurs,

$$\tau' = \frac{-1}{s'^2\sigma'}\Sigma A\alpha'_1,$$

et par suite

$$\frac{1}{T} = \frac{-1}{s'^3\sigma'}\Sigma A\alpha'_1.$$

Pour avoir α'_1, écrivons

$$\alpha_1 = \alpha'\frac{1}{\sigma'},$$

d'où

$$\alpha'_1 = \alpha''\frac{1}{\sigma'} + \alpha'\left(\frac{1}{\sigma'}\right)'.$$

Calculons α''. On a

$$\alpha' = x''\frac{1}{s'} + x'\left(\frac{1}{s'}\right)',$$

$$\alpha'' = x'''\frac{1}{s'} + \ldots,$$

les termes qui suivent le premier contenant en facteur soit x', soit x''. Rappelons que nous avons

$$\Sigma Ax' = 0, \qquad \Sigma Ax'' = 0,$$

et, par suite,

$$\Sigma A\alpha = 0, \qquad \Sigma A\alpha' = 0.$$

On peut donc écrire

$$\Sigma A\alpha'_1 = \frac{1}{\sigma'}\Sigma A\alpha'' = \frac{1}{s'\sigma'}\Sigma Ax''',$$

par suite

$$\frac{1}{T} = \frac{-1}{s'^4\sigma'^2}\Sigma Ax''' = \frac{-\Sigma Ax'''}{A^2+B^2+C^2}.$$

D'ailleurs $\Sigma A x'''$ est égal au déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

et l'on a finalement

$$T = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}.$$

On voit que T *est un nombre algébrique qui a le signe opposé à celui de* Δ.

Portons l'origine au point M considéré et prenons pour axes les axes MX, MY, MZ définis précédemment. Nous avons vu (n° 393) que l'on avait pour l'origine

$$Y' = Z' = Z'' = 0,$$

d'où résulte, pour la valeur de Δ en ce point,

$$\Delta = X'Y''Z'''.$$

D'ailleurs X' et Y'' sont positifs. T a donc le signe contraire à celui de Z'''. Si $T < 0$, on a $Z''' > 0$. Z'' croît au voisinage de M, donc il est d'abord négatif, puis positif. Z' est constamment positif, donc Z est d'abord négatif, puis positif.

Dans le cas de $T > 0$, les conclusions sont renversées.

On voit que *la position dextrorsum ou sinistrorsum dépend du signe de* T.

395. *Formules de Frenet.* — Les formules de Frenet donnent les dérivées des neuf cosinus directeurs du trièdre MXYZ attaché à chaque point de la courbe. Nous avons déjà obtenu les formules suivantes :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R},$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}, \qquad \frac{d\beta_2}{ds} = \frac{\beta_1}{T}, \qquad \frac{d\gamma_2}{ds} = \frac{\gamma_1}{T},$$

le second groupe résultant de la définition de T (n° 394). La relation

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

différentiée, donne

$$\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \alpha_1\frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_2\frac{d\alpha_2}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha\frac{\alpha_1}{R} + \alpha_1\frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_2\frac{\alpha_1}{T} = 0.$$

d'où nous tirons

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}.$$

Nous aurons de même

$$\frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta_2}{T}, \qquad \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma_2}{T}.$$

C'est le troisième groupe de formules de Frenet.

396. *Courbes planes*. — Considérons le cas particulier des courbes planes : tous les résultats généraux que nous avons démontrés s'appliquent. Il suffit de faire, par exemple, $Z = 0$ dans les formules obtenues ; il en résulte $A = 0$, $B = 0$; C conserve la même valeur $x'y'' - y'x''$. L'expression du rayon de courbure devient

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Étant donnée une courbe plane, si l'on cherche l'enveloppe de la normale à cette courbe, le point de contact de cette normale avec son enveloppe est le *centre de courbure*, car (n° 392), deux plans normaux quelconques se coupant suivant une perpendiculaire au plan de la courbe, la droite polaire est ici la perpendiculaire au plan de la courbe menée par le centre de courbure.

Pour une courbe plane, la torsion est nulle en tout point.

397. *Cas singuliers*. — Étant donnée une courbe définie par les coordonnées x, y, z d'un de ses points en fonction d'un paramètre t, la tangente en un point est déterminée tant que les dérivées x', y', z' ne sont pas toutes trois nulles pour ce point. Si l'on a $x' = y' = z' = 0$, les équations de la tangente se présentent sous forme indéterminée. Cependant, il se peut qu'il y ait en ce point une tangente déterminée. Il faudra, dans chaque cas, faire une étude particulière de la courbe en ce point.

De même, si A, B, C ne sont pas tous trois nuls en un point, le plan osculateur est déterminé. Si l'on a $A = B = C = 0$, il faut faire une étude particulière, en revenant à la définition du plan osculateur, pour voir s'il y a ou non un plan osculateur déterminé. De plus, en un tel point, *le rayon de courbure* R *est infini*. Si l'on prend x comme variable indépendante, on a $x' = 1$, $x'' = 0$, d'où

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = -z'', \qquad C = y''.$$

Pour qu'on ait $A = B = C = 0$, il faut $y'' = z'' = 0$. Cela indique que les projections de la courbe sur le plan des xy ou des xz présentent au point considéré une inflexion.

En tout point d'une droite, le rayon de courbure R est infini.

Cherchons si l'on peut avoir en un point d'une courbe $R = 0$. En supposant que les dérivées premières et secondes restent finies, il faut que l'on ait $x' = y' = z' = 0$. Mais alors R se présente sous forme indéterminée, il y a lieu à discussion. Prenons, par exemple, la courbe plane définie par les équations

$$x = t^2, \qquad y = t^3;$$

on constate que R, pour $t = 0$, est de l'ordre de grandeur de t, donc s'annule avec t. L'origine est pour cette courbe un point de rebroussement à rayon de courbure nul.

Cherchons si en un point d'une courbe T peut être infini, c'est-à-dire si la torsion peut être nulle. En général, il y a un nombre fini de points de la courbe jouissant de cette propriété : ce sont les points pour lesquels on a $\Delta = 0$. On les appelle *points stationnaires*. Avec les axes particuliers MXYZ déjà choisis, nous avons vu que l'on a $\Delta = X'Y''Z'''$, de sorte que $\Delta = 0$ entraîne $Z''' = 0$. En un tel point, si l'on suppose en outre $Z^{iv} \neq 0$, le plan osculateur ne traverse pas la courbe, car on reconnaît que Z garde un signe constant au voisinage de M.

398. *Une courbe dont la torsion est nulle en tout point est une courbe plane.* — En effet, les formules $\frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}, \cdots$ montrent que pour une telle courbe $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont constants. Le plan osculateur a donc une direction fixe et les tangentes à la courbe, qui restent parallèles à cette direction de plan, sont, par suite, perpendiculaires à une direction de droite fixe. En prenant l'axe des Z parallèle à cette dernière direction, on aura, en tout point, $\gamma = 0$, d'où $Z' = 0$, $Z = \text{const.}$ La courbe est donc dans un plan.

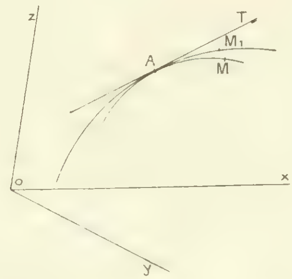
III. — Contact des courbes et surfaces.

399. Considérons deux courbes C et C_1 tangentes en un point A. Choisissons des axes de coordonnées tels que la tangente commune en A ne soit pas parallèle au plan des yz (*fig.* 32).

Dans ces conditions, pour chaque courbe, x, au voisinage de A,

varie dans un sens déterminé. On peut donc, pour chaque courbe, prendre x comme variable indépendante, c'est-à-dire supposer les

Fig. 32.



deux courbes définies par des équations de la forme

$$C \begin{cases} y = f(x), \\ z = \varphi(x), \end{cases} \qquad C_1 \begin{cases} y = F(x), \\ z = \Phi(x). \end{cases}$$

Soit x_0 l'abscisse de A. Pour que les deux courbes soient tangentes en ce point, il faut et il suffit que l'on ait

$$f'(x_0) = F'(x_0), \qquad \varphi'(x_0) = \Phi'(x_0).$$

Supposons d'une manière générale que l'on ait avec ces relations

$$(1) \quad \begin{cases} f''(x_0) = F''(x_0), & \varphi''(x_0) = \Phi''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(x_0), & \varphi^{(n)}(x_0) = \Phi^{(n)}(x_0), \end{cases}$$

et que l'on n'ait pas simultanément

$$f^{(n+1)}(x_0) = F^{(n+1)}(x_0), \qquad \varphi^{(n+1)}(x_0) = \Phi^{(n+1)}(x_0).$$

Coupons les deux courbes C, C_1 par un plan parallèle au plan des yz et d'abscisse $x = x_0 + h$. On obtient ainsi sur C un point $M(x, y, z)$, sur C_1 un point $M_1(x, y_1, z_1)$; étudions les différences $y_1 - y$, $z_1 - z$. On a

$$y_1 - y = F(x_0 + h) - f(x_0 + h).$$

Les fonctions F et f sont développables par la formule de Taylor arrêtée au $n+1^{\text{ième}}$ terme; en les remplaçant par leurs développements, on a

$$y_1 - y = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[F^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)\right],$$

et de même

$$z_1 - z = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[\Phi^{(n+1)}(x_0 + \theta_1 h) - \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta'_1 h)\right].$$

Par hypothèse, quand h tend vers o, les différences entre crochets ne tendent pas toutes deux vers o. L'une au moins des deux quantités $y_1 - y$, $z_1 - z$ est donc infiniment petite d'ordre $n+1$ seulement par rapport à h, l'autre pouvant être d'ordre supérieur ou égal à $n+1$. La distance MM_1 est par suite, de toute façon, infiniment petite d'ordre $n+1$ par rapport à h. D'ailleurs, la distance AM est un infiniment petit de l'ordre de h, de sorte que MM_1 est, par rapport à AM, un infiniment petit d'ordre $n+1$.

Je dis que ce résultat est indépendant des axes de coordonnées choisis, pourvu que la tangente en A reste non parallèle au plan yz. En effet, effectuons un changement de coordonnées en passant du système x, y, z à un autre système X, Y, Z. On sait que y'_x, z'_x sont fonctions des nouvelles dérivées Y'_X, Z'_X, que y''_{x^2}, z''_{x^2} sont fonctions de Y'_X, Z'_X, Y''_{X^2}, Z''_{X^2}, etc., de sorte que, si pour les deux courbes C et C_1 les dérivées de y et z par rapport à x sont identiques jusqu'à l'ordre p, il en est de même des dérivées de Y, Z par rapport à X ; en d'autres termes, les relations (1) se transforment en des relations de même forme. La propriété géométrique à laquelle on parvient, à savoir : que la distance MM_1 est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la distance AM, est donc indépendante du choix des axes de coordonnées; cela revient à dire que l'on peut, pour obtenir les points M et M_1, couper les deux courbes C et C_1 par un plan P parallèle à une direction de plan arbitraire mais fixe. Lorsque le plan P variera en se rapprochant du point A, la distance MM_1 sera un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la distance AM.

Par définition, on dit qu'*il y a au point* A *un contact d'ordre n entre les deux courbes.*

400. Nous allons chercher à exprimer les conditions d'un contact d'ordre n entre deux courbes dont l'une C est définie par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

et dont l'autre C_1 est définie en fonction d'un paramètre t.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point commun aux deux courbes, la tangente à chacune d'elles en ce point n'étant pas parallèle au plan des yz. Soient $M(x, y, z)$ un point de C, $M_1(x, y_1, z_1)$ un point

de C_1, M et M_1 étant tous deux voisins de M_0 et correspondant à la même abscisse. Posons $y_1 - y = u$, $z_1 - z = v$. Il faut, pour qu'il y ait un contact d'ordre n, que u et v soient infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $x - x_0$. Remplaçons, dans les fonctions F et Φ, x, y, z par les coordonnées x, y_1, z_1 du point M_1 exprimées en fonction de t. On a

$$\begin{aligned}F(x, y_1, z_1) &= F(x, y+u, z+v)\\ &= F(x, y, z) + u\frac{\partial F}{\partial y}(x, y+\theta u, z+\theta v)\\ &\quad + v\frac{\partial F}{\partial z}(x, y+\theta u, z+\theta v).\end{aligned}$$

Comme $F(x, y, z) = 0$, on peut écrire

$$F(x, y_1, z_1) = Au + Bv, \tag{1}$$

A et B ayant pour limites, quand le point M varie et tend vers le point commun (x_0, y_0, z_0), les nombres $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$.

De même, on a

$$\Phi(x, y_1, z_1) = Cu + Dv. \tag{2}$$

C et D ayant pour limites, dans les mêmes conditions, les nombres $\frac{\partial \Phi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z_0}$.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y_0} & \dfrac{\partial F}{\partial z_0}\\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_0}\end{vmatrix}$$

de ces quantités est différent de 0, du fait que la tangente en A à C est supposée non parallèle au plan des yz. On peut donc résoudre, au voisinage de M_0, les équations (1) et (2) par rapport à u, v, et obtenir pour u, v des expressions linéaires en $F(x, y_1, z_1)$, $\Phi(x, y_1\, z_1)$.

Pour que u et v soient tous deux infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $x - x_0$, il faut et il suffit que $F(x, y_1, z_1)$ et $\Phi(x, y_1, z_1)$ le soient, ou, ce qui revient au même, que $F(x, y_1, z_1)$ et $\Phi(x, y_1, z_1)$ soient infiniment petits d'ordre $n+1$ en $t - t_0$, t_0 étant la valeur du paramètre pour le point M_0. On peut donc énoncer la règle pratique suivante :

On remplace, dans F *et* Φ, x, y, z *par leurs valeurs en fonction de* t, *et l'on exprime que les fonctions de* t *ainsi obtenues*, $G(t)$

et $G_1(t)$, sont toutes deux infiniment petites d'ordre $n+1$ par rapport à $t - t_0$.

On voit que dans ce résultat il ne reste pas trace de l'hypothèse faite sur la direction de la tangente, de sorte que la règle est valable sans cette restriction.

Pour exprimer que $G(t)$ et $G_1(t)$ sont des infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $t - t_0$, il suffit d'exprimer que chacune de ces fonctions s'annule, ainsi que ses n premières dérivées, pour $t = t_0$; on a ainsi $2n + 2$ conditions.

401. *Cas des courbes planes.* — Tous ces résultats s'appliquent en particulier au cas des courbes planes. Pour exprimer par exemple qu'il y a un contact d'ordre n entre une courbe C ayant pour équation

$$F(x, y) = 0$$

et une courbe C_1 définie en fonction d'un paramètre t, on devra écrire que $F(x, y)$, où l'on remplace x, y par les fonctions de t qui définissent C_1, est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $t - t_0$. On aura ici $n+1$ conditions.

402. *Courbes osculatrices.* — Considérons une courbe déterminée C et un point A de cette courbe. Soit, d'autre part, une famille de courbes dépendant d'un certain nombre de paramètres. On peut chercher à disposer de ces paramètres de façon à obtenir une courbe de la famille ayant en A, avec la courbe C, un contact d'un certain ordre.

On appelle *courbe osculatrice en un point* A de C une courbe de la famille considérée ayant en A avec C un contact d'ordre maximum par rapport aux autres courbes de la famille.

403. Considérons par exemple la famille formée de toutes les droites de l'espace. Une droite dépend de quatre paramètres. Un contact d'ordre n exigeant $2n + 2$ conditions, nous pouvons donc avoir $n = 1$.

Prenons les équations de la droite sous la forme

$$x - az - p = 0, \qquad y - bz - q = 0,$$

et remplaçons dans ces équations x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe donnée. Les équations obtenues doivent être

vérifiées, ainsi que celles qu'on obtient en les dérivant par rapport à t, savoir :

$$x' - az' = 0, \qquad y' - bz' = 0.$$

On déduit de là

$$a = \frac{x'}{z'}, \qquad b = \frac{y'}{z'}.$$

Cela montre que a, b, 1 sont les coefficients de la tangente à la courbe au point considéré. D'ailleurs, les deux premières relations, qui déterminent p et q, montrent que la droite passe par ce point. C'est donc la tangente en ce point, de sorte que, parmi les droites de l'espace, celle qui a le contact maximum avec une courbe quelconque en un point donné est la tangente à la courbe en ce point.

404. Un cercle dans l'espace est une courbe dépendant de six paramètres. On peut en disposer de façon à obtenir un cercle qui ait, en un point donné, avec une courbe donnée, un contact du second ordre. Écrivons les équations d'un cercle sous la forme

$$(1) \qquad A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$

$$(2) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0,$$

en mettant ainsi en évidence son centre (a, b, c), son rayon ρ et les coefficients A, B, C de son plan.

Une courbe étant donnée par les coordonnées d'un de ses points en fonction d'un paramètre t, remplaçons x, y, z par ces fonctions de t dans les équations (1) et (2), puis annulons les dérivées premières et secondes des premiers membres de (1) et (2). On a les quatre nouvelles équations

$$(3) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$(4) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

$$(5) \qquad (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0,$$

$$(6) \qquad (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Ces quatre équations, jointes aux deux premières, permettent de déterminer a, b, c, ρ, A, B, C. Les équations (3) et (4) montrent que A, B, C sont les coefficients du plan osculateur à la courbe au point considéré, de sorte que le plan du cercle cherché est le plan osculateur à la courbe.

Dans les équations (5) et (6), considérons a, b, c comme les coordonnées courantes. (5) représente alors le plan normal à la

courbe au point considéré, et l'équation (6) est celle qu'on obtient en dérivant (5) par rapport à t. L'ensemble de ces deux équations représente donc la caractéristique du plan normal quand le point (x, y, z) varie sur la courbe donnée, c'est-à-dire la droite polaire.

De plus, l'équation (1) exprime que (a, b, c) est dans le plan osculateur. Le point (a, b, c) est donc à l'intersection de la droite polaire avec le plan osculateur, c'est-à-dire au centre de courbure.

Enfin, l'équation (2) montre que ρ, le rayon du cercle, est égal à la distance du point (x, y, z) de la courbe au centre de courbure (a, b, c).

En résumé, le cercle osculateur est le cercle qui a pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure. On l'appelle aussi *cercle de courbure*, parce qu'il a au point (x, y, z) même courbure que la courbe donnée.

405. *Contact d'une courbe et d'une surface.* — Étant données une courbe C et une surface S tangentes en un point A, on dit qu'il y a en A, pour C et S, un contact d'ordre n, s'il existe sur S une courbe Γ passant par A et ayant avec C en ce point un contact d'ordre n. Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de S. Γ sera définie par l'intersection de S avec une certaine surface. Une première condition est donc que F, si l'on y remplace x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe C, soit infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $t - t_0$, t_0 étant le paramètre correspondant au point A.

Je dis que cette condition est suffisante. En effet, supposons-la remplie et prenons des axes tels que la tangente à C en A ne soit pas parallèle au plan des yz (*fig.* 33). Nous savons que, dans ces conditions, nous pouvons prendre, pour définir la courbe C, x comme variable indépendante. Soit

$$y = f(x)$$

l'équation du cylindre projetant C parallèlement à Oz sur le plan des xy. Nous allons montrer que la courbe Γ, intersection de S avec ce cylindre, a avec C un contact d'ordre n en A.

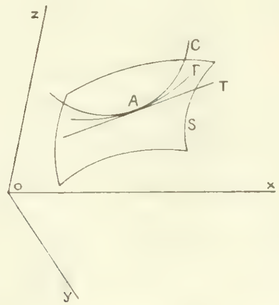
En effet, Γ a pour équations

$$F = 0, \qquad y - f(x) = 0.$$

Quand on remplace dans les premiers membres de ces deux équa-

tions x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe C, la fonction $y - f(x)$ est identiquement nulle, donc satisfait à toutes

Fig. 33.



les conditions imposées; par hypothèse, la fonction F satisfait aussi à ces conditions. Donc Γ a, avec C en A, un contact d'ordre n.

406. D'après cela, étant donnée une courbe C, si l'on considère une famille de surfaces dépendant de $n+1$ paramètres, on peut disposer de ces paramètres de manière à obtenir en un point M, entre la courbe et une surface, un contact d'ordre n. Parmi les surfaces d'une famille, on appelle *surface osculatrice* à une courbe donnée en M celle qui a en ce point, avec la courbe, le contact d'ordre maximum.

Cherchons, par exemple, le plan qui a le contact d'ordre maximum avec une courbe définie en fonction d'un paramètre. Comme un plan dépend de 3 paramètres, cet ordre sera égal à 2. Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan. Remplaçons dans cette équation x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe. Nous devrons avoir, outre l'équation précédente,

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

On trouve ainsi pour A, B, C les coefficients du plan que nous avons appelé *plan osculateur* dans l'étude des courbes gauches.

IV. — Développées et développantes.

407. *Développées des courbes planes.* — Considérons dans le plan des xy une courbe C. On appelle *développée* de cette courbe l'enveloppe de sa normale.

Si la courbe C est une droite, la normale reste parallèle à une direction fixe; elle n'a pas d'enveloppe.

Si C est un cercle, la normale passe pas un point fixe; on peut dire qu'elle a pour enveloppe ce point.

Réciproquement, si pour une courbe la normale a une direction fixe, la tangente a aussi une direction fixe; ses coefficients α, β sont constants. Si l'on prend des axes tels que $\beta = 0$, on en déduit $y =$ const.; donc la courbe est une droite.

Si la normale passe par un point fixe, prenons ce point pour origine et écrivons l'équation de la normale

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0.$$

Puisqu'elle passe par l'origine, c'est que l'on a

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = \text{const.},$$

ce qui montre que la courbe est un cercle ayant pour centre l'origine.

Ces deux cas mis à part, la normale varie en direction sans passer par un point fixe; il existe sur cette droite un point limite qui est le centre de courbure (n° 396). Lorsque le pied de la normale prend toutes les positions sur la courbe C, ce point décrit une courbe qui est la *développée* de C.

408. Dans le cas d'une courbe plane, les formules de Frenet deviennent, en conservant les notations précédentes,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R},$$
$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R}, \qquad \frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{R}.$$

Soit φ l'angle de la demi-tangente dirigée dans le sens positif avec Ox; on a

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi.$$

Le centre de courbure (x_1, y_1) a pour coordonnées

$$(1) \qquad x_1 = x + \alpha_1 R, \qquad y_1 = y + \beta_1 R.$$

On a, en différentiant les formules (1),

$$dx_1 = dx + \alpha_1\,dR + R\,d\alpha_1,$$

c'est-à-dire

$$dx_1 = \alpha\, ds + \alpha_1\, dR - \alpha\, ds = \alpha_1\, dR.$$

de même

$$dy_1 = \beta_1\, dR.$$

Soit s_1 l'arc de la développée compté à partir d'une certaine origine; on a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Il en résulte que si, pour un certain arc de la courbe donnée, le rayon de courbure varie toujours dans le même sens, la valeur absolue de l'accroissement de s_1 est égale à l'accroissement de R, de sorte que *la longueur de l'arc de développée correspondant est égale à la quantité dont a augmenté ou diminué le rayon de courbure.*

Il résulte aussi de là que si, pour une courbe, R est constant, ds_1 est nul, x_1, y_1 sont constants, le centre de courbure est fixe; c'est le cas du cercle. *Le cercle est donc la seule courbe plane à rayon de courbure constant.*

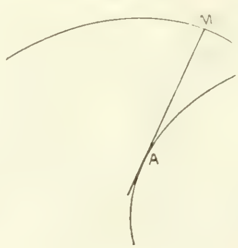
Les formules $dx_1 = \alpha_1\, dR$, ... montrent encore que, si pour une courbe plane quelconque R passe par un maximum, on a, pour le point (x_1, y_1) correspondant,

$$dx_1 = dy_1 = 0.$$

Cela indique en général, comme l'on sait, que (x_1, y_1) est pour la développée un point de rebroussement. C'est, en effet, ce que l'on trouve en construisant la développée d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole.

409. *Développantes.* — Considérons une courbe et sa développée; la première est dite la *développante* de la seconde.

Fig. 34.



Étant donnée une courbe, cherchons si elle a une développante, c'est-à-dire une courbe qui admette comme normales les tangentes à

la première. D'après ce qui précède, l'accroissement de longueur de la normale (*fig.* 34) (en entendant par *longueur de la normale* la distance du point d'incidence M au point limite A) doit être égal à l'accroissement de l'arc de la courbe donnée.

Soient ξ, η les coordonnées du point A qui décrit la courbe donnée, σ l'arc de cette courbe compté à partir d'une certaine origine. Les cosinus directeurs de la direction positive de la tangente sont

$$\alpha = \frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad \beta = \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Portons sur cette direction, à partir du point (ξ, η), un segment AM ayant pour valeur algébrique $l - \sigma$, l étant une constante arbitraire. Je dis que *le point* M (x, y) *ainsi obtenu décrit une courbe normale à la tangente en* A.

En effet, nous avons

$$x = \xi + \alpha(l - \sigma), \qquad y = \eta + \beta(l - \sigma),$$

d'où, en différentiant,

$$dx = d\xi - \alpha\, d\sigma + (l - \sigma)\, d\alpha = (l - \sigma)\, d\alpha,$$

de même

$$dy = (l - \sigma)\, d\beta.$$

Pour vérifier que le lieu de M est normal à AM, il suffit de vérifier

$$\alpha\, dx + \beta\, dy = 0.$$

Or, on a

$$\alpha\, dx + \beta\, dy = (l - \sigma)(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta) = 0.$$

On obtient ainsi comme lieu de M une développante de la courbe donnée; elle dépend d'un paramètre arbitraire l. *Une courbe a donc une infinité de développantes, deux quelconques d'entre elles étant des courbes parallèles.* On dit que la famille de développantes coupe à angle droit toutes les tangentes à la courbe donnée, ou encore que chaque développante est une *trajectoire orthogonale* de ces tangentes.

410. *Trajectoires orthogonales.* — D'une manière générale, étant donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre, on peut trouver une seconde famille de courbes telle que deux courbes quelconques, prises l'une dans la première famille, l'autre dans la seconde, soient orthogonales en l'un de leurs points d'intersection.

Soit

$$f(x, y, a) = 0$$

l'équation de la famille de courbes donnée. Formons l'équation différentielle de ces courbes, soit

$$F(x, y, y') = 0.$$

En un point commun à deux courbes des deux familles, les tangentes à ces deux courbes doivent être rectangulaires. Donc le coefficient angulaire de la tangente à la seconde est $-\frac{1}{y'}$. On en déduit que la seconde famille, si elle existe, a pour équation différentielle

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

En intégrant cette équation, on aura l'équation d'une famille de courbes orthogonales aux courbes données.

On peut rattacher à cette théorie certaines propriétés des fonctions harmoniques. On sait que, étant donnée une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, elle se met sous la forme

$$f = P(x, y) + iQ(x, y),$$

P et Q étant des fonctions harmoniques; on a

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On déduit de là que les deux familles de courbes ayant pour équations

$$P(x, y) - a = 0,$$
$$Q(x, y) - b = 0,$$

a et b étant des paramètres arbitraires, sont orthogonales. En effet, soit (x, y) un point du plan; considérons les deux courbes qui passent par ce point. Les coefficients de la tangente à la première sont

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y};$$

ceux de la tangente à la seconde sont

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ces deux droites sont rectangulaires, car on a, d'après (1),

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

411. *Développées des courbes gauches.* — Étant donnée une courbe gauche C, cherchons s'il est possible de trouver une droite variable la rencontrant en un point M, normale à C en M, et en même temps tangente à une autre courbe, qui sera dite une *développée* de C.

Si cela a lieu, soient x, y, z les coordonnées (rectangulaires) de M; soit I le point de contact de la droite avec son enveloppe, soient a et b les valeurs algébriques des projections de MI sur la normale principale et la binormale; les coordonnées x_1, y_1, z_1 de I sont, d'après cela,

$$x_1 = x + a\alpha_1 + b\alpha_2, \qquad y_1 = y + a\beta_1 + b\beta_2, \qquad z_1 = z + a\gamma_1 + b\gamma_2.$$

Pour que MI satisfasse aux conditions du problème, il faut et il suffit que le déplacement du point x_1, y_1, z_1 ait lieu tangentiellement à MI. Or, les cosinus directeurs de MI sont proportionnels à $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. On doit donc avoir

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z}.$$

Soit λ la valeur commune de ces trois rapports. On en déduit trois relations telles que

$$dx_1 = \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2).$$

D'ailleurs, on a

$$dx_1 = dx + a\,d\alpha_1 + b\,d\alpha_2 + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db,$$

d'où la relation

$$dx + a\,d\alpha_1 + b\,d\alpha_2 + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db - \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2) = 0.$$

Remplaçons dx par $\alpha\,ds$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ par leurs valeurs tirées des formules de Frenet, il vient

$$\alpha\,ds + a\,ds\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}\right) + b\,ds\frac{\alpha_1}{T} + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db - \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2) = 0;$$

c'est une relation de la forme

$$A\alpha + B\alpha_1 + C\alpha_2 = 0.$$

On obtient de même les deux autres relations

$$A\beta + B\beta_1 + C\beta_2 = 0,$$
$$A\gamma + B\gamma_1 + C\gamma_2 = 0.$$

Nous avons ainsi trois équations linéaires et homogènes en A, B, C. Le déterminant formé avec les coefficients de ces quantités étant différent de zéro, il faut, pour que ces trois équations soient vérifiées, que l'on ait

$$A = B = C = 0,$$

et d'ailleurs ces conditions suffisent. Elles s'écrivent

$$1 - \frac{a}{R} = 0,$$

$$b\frac{ds}{T} - \lambda a + da = 0,$$

$$-a\frac{ds}{T} - \lambda b + db = 0.$$

La première relation montre que l'on a $a = R$, donc le point I est sur la droite polaire; la développée, si elle existe, est sur la surface polaire. Éliminons λ entre les deux autres relations, il vient

$$(b^2 + R^2)\frac{ds}{T} + b\,dR - R\,db = 0,$$

d'où

$$\frac{ds}{T} = \frac{R\,db - b\,dR}{b^2 + R^2}.$$

Soit φ l'angle de MI avec la normale principale, on a $\frac{b}{R} = \tang\varphi$, et il en résulte

$$\frac{R\,db - b\,dR}{b^2 + R^2} = d\varphi = \frac{ds}{T}.$$

Cette relation $\frac{ds}{T} = d\varphi$ détermine la différentielle de φ. On voit que le problème proposé est possible et comporte une infinité de solutions. En effet, l'angle φ est donné par la formule

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^s \frac{ds}{T};$$

il dépend donc d'une quantité arbitraire φ_0 qui est la valeur initiale de φ. Une fois cette valeur initiale fixée, φ et, par suite, le mouvement de MI sont déterminés.

Une courbe gauche a donc une infinité de développées. Deux

quelconques de ces développées sont telles que deux normales au même point M correspondant à ces deux développées se coupent sous un angle qui reste constant lorsque M varie. L'accroissement de φ est, en effet, le même pour toutes les développées.

412. Considérons l'arc de la développée : on a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

ou, en remplaçant dx_1 par $\lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2)$, etc.,

$$ds_1^2 = \lambda^2 \sum (a\alpha_1 + b\alpha_2)^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) = \lambda^2 \overline{\mathrm{MI}}^2.$$

Or, nous avons les équations

$$b\frac{ds}{\mathrm{T}} + da - \lambda a = 0, \qquad -a\frac{ds}{\mathrm{T}} + db - \lambda b = 0;$$

on en déduit

$$a\,da + b\,db - \lambda(a^2 + b^2) = 0,$$

$$\lambda = \frac{a\,da + b\,db}{a^2 + b^2}.$$

Portons cette valeur de λ dans l'expression de ds_1^2, il vient

$$ds_1^2 = \frac{(a\,da + b\,db)^2}{a^2 + b^2}.$$

Or, on a

$$\frac{a\,da + b\,db}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d(\sqrt{a^2 + b^2}) = d(\mathrm{MI}),$$

d'où, finalement,

$$ds_1^2 = [d(\mathrm{MI})]^2.$$

Cela montre que, si pour un certain arc l'accroissement de MI est toujours de même sens, s_1 croît de la quantité dont augmente ou diminue MI. C'est un résulat analogue à celui que nous avons obtenu pour les courbes planes.

413. *Développantes.* — Cherchons à porter, sur la tangente en M à une courbe gauche, un segment de longueur variable l, dont l'extrémité P décrive une courbe normale aux tangentes de la courbe donnée. Soient x, y, z les coordonnées du point M qui décrit la courbe donnée; les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P sont

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma.$$

Pour que le lieu de ce point soit une courbe normale à la droite MP, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\alpha\, dx_1 + \beta\, dy_1 + \gamma\, dz_1 = 0,$$

qui, en tenant compte de

$$dx_1 = dx + l\, d\alpha + \alpha\, dl, \qquad \ldots,$$

devient

$$ds + dl = 0,$$

d'où

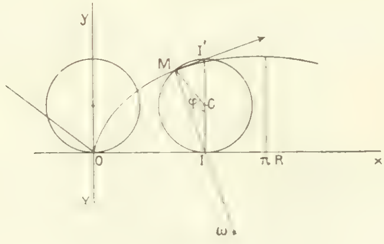
$$l = c - s,$$

c étant une constante et s étant l'arc de la courbe donnée compté à partir d'une origine quelconque.

V. — Étude de quelques courbes.

414. *Cycloïde.* — Si l'on fait rouler, sans glissement, un cercle sur une droite, la courbe décrite par un point quelconque du cercle s'appelle *cycloïde;* la droite est dite la *base*. Prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy, Ox étant la base. Considérons le cercle partant de la position pour laquelle le point de contact avec la base est O (*fig.* 35). Figurons une seconde position du cercle; soient I le

Fig. 35.



nouveau point de contact, M la position occupée par le point qui était en O dans la première position. Le cercle roulant sans glisser, on a

$$\text{arc } MI = OI.$$

Prenons comme paramètre l'angle φ dont a tourné le rayon CM, c'est-à-dire l'angle ICM. Les coordonnées de C sont

$$x = R\varphi, \qquad y = R.$$

En menant par O la parallèle à CM, on voit que

$$(Oy', CM) = -\varphi,$$

d'où

$$(Ox, CM) = (Ox, Oy') + (Oy', CM) = -\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Les coordonnées de M sont donc

$$x = R\varphi + R\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = R + R\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R(1 - \cos\varphi).$$

Quand φ augmente de 2π, y reprend la même valeur et x augmente de $2\pi R$. Il suffit de construire la partie de la courbe correspondant à l'intervalle $(0, 2\pi)$; la courbe tout entière se compose d'une infinité de portions semblables, se déduisant l'une de l'autre par une translation parallèle à la base et égale à $2\pi R$. Calculons les dérivées premières et secondes de x, y :

$$x' = R(1 - \cos\varphi), \qquad y' = R\sin\varphi,$$
$$x'' = R\sin\varphi, \qquad y'' = R\cos\varphi.$$

On voit que la courbe part de O tangentiellement à Oy, car pour $\varphi = 0$ le coefficient angulaire de la tangente $\frac{y'}{x'}$, qui est égal à $\cot\frac{\varphi}{2}$, est infini.

Pour $\varphi = \pi$, la tangente est parallèle à Ox, y passe par un maximum égal à $2R$. La droite $x = \pi R$, qui passe par ce point, est un axe de symétrie pour la branche de courbe que nous construisons, car, si l'on donne à φ deux valeurs équidistantes de π, y prend la même valeur, x prend deux valeurs équidistantes de πR.

Calculons la longueur de l'arc; on a

$$s'^2 = 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

d'où, comme $\sin\frac{\varphi}{2}$ est positif,

$$s' = 2R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

La longueur de la branche étudiée est

$$s = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\varphi}{2} = 4R\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)_0^{2\pi} = 8R.$$

Cherchons quelle est la normale au point M.

La tangente a pour coefficient angulaire $\cot\frac{\varphi}{2}$. Elle fait donc avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$: c'est la droite MI′, I′ étant le point du cercle diamétralement opposé à I. Il en résulte que MI est la normale. Calculons le rayon de courbure ρ. On a, d'après la formule générale,

$$\rho = \frac{s'^3}{|x'y''-y'x''|} = \left|\frac{8R^3\sin^3\frac{\varphi}{2}}{R^2(1-\cos\varphi)}\right| = 4R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Comme on a $MI = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$, on en déduit

$$\rho = 2MI.$$

Le centre de courbure ω est donc symétrique de M par rapport à I ; ses coordonnées sont

$$x_1 = R(\varphi + \sin\varphi), \qquad y_1 = -R(1-\cos\varphi).$$

Posons

$$\varphi_1 = \varphi + \pi, \qquad x_1 + \pi R = X, \qquad y_1 + 2R = Y;$$

il vient

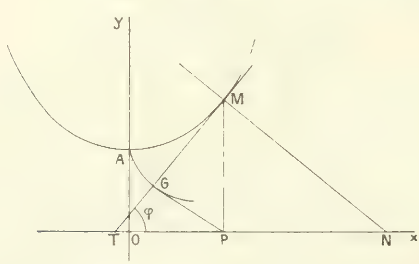
$$X = R(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \qquad Y = R(1-\cos\varphi_1),$$

Le lieu du point ω est donc une cycloïde égale à la première.

415. *Chaînette.* — C'est la courbe plane représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

Fig. 36.



a étant une constante positive. Cette courbe, qui présente une forme parabolique, est symétrique par rapport à Oy et rencontre cet axe en un point A, d'ordonnée a (*fig.* 36). Calculons les dérivées première

et seconde de y, x étant la variable indépendante : on a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}.$$

Soit M un point de la courbe ; calculons le rayon de courbure en ce point. La formule générale devient

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Nous avons ici

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{y^2}{a^2},$$

d'où

$$R = \frac{\frac{y^3}{a^3}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Considérons la tangente MT à la courbe en M ; soit φ l'angle qu'elle fait avec Ox. φ est défini par sa tangente qui est égale à y' ; on en déduit

$$\sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{a}{y}.$$

Menons la normale MN à la courbe ; on a, P étant la projection de M sur Ox,

$$\text{PM} = \text{MN}\cos\varphi,$$

d'où

$$\text{MN} = \frac{\text{PM}}{\cos\varphi} = \frac{y}{\frac{a}{y}} = \text{R}.$$

MN étant égal au rayon de courbure, le centre de courbure est le symétrique de N par rapport à M.

Évaluons l'arc AM ; nous avons

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{y}{a}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

d'où, en prenant A comme origine des arcs,

$$\text{arc AM} = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Abaissons de P la perpendiculaire PG sur MT. Je dis que l'on a

$$\text{arc AM} = \text{GM}.$$

En effet, on a

$$\text{GM} = \text{PM}\sin\varphi = y\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Remarquons aussi que l'on a

$$\text{PG} = \text{PM}\cos\varphi = y\,\frac{a}{y} = a.$$

416. *Tractrice.* — Considérons maintenant le lieu du point G. Pour obtenir G, on porte sur la tangente en M à la chaînette un segment MG égal à la longueur de l'arc AM. Or, c'est là la construction générale d'une développante d'une courbe. Le lieu de G est donc une développante de la chaînette ; on appelle cette courbe la *tractrice*. Elle part du point A, tangentiellement à Oy et est symétrique par rapport à cet axe ; sa normale en G est GM, sa tangente est GP. Nous avons vu que ce segment GP a une longueur constante et égale à a. On dit que la tractrice est une *courbe à tangentes égales*, en entendant par tangentes les segments tels que GP.

Dans le triangle TMP on a

$$\text{GM}.\text{GT} = \overline{\text{GP}}^2 = a^2.$$

Or, pour la tractrice, M est le point de rencontre de la normale avec son enveloppe ; GM est donc le rayon de courbure de la tractrice. En appelant normale le segment GT, c'est-à-dire la portion de normale comprise entre le point d'incidence et l'axe des x, nous pouvons dire que dans la tractrice le produit du rayon de courbure par la normale est constant.

Quand M s'éloigne indéfiniment, GT tend vers o, φ vers $\frac{\pi}{2}$, la courbe est asymptote à Ox.

417. *Hélices.* — Soit C_1 une courbe plane (*fig.* 37) ; prenons un système d'axes rectangulaires, le plan des xy étant le plan de C_1. Soit m un point de cette courbe C_1 ; sur la perpendiculaire en m au plan des xy, portons à partir de m un segment mM proportionnel à l'arc $O_1 m$, O_1 étant une certaine origine prise sur la courbe C_1. Le lieu C du point M, lorsque m décrit C_1, est une *hélice*.

Soient s_1 l'arc $O_1 m$, s l'arc $O_1 M$ de l'hélice; on a, k étant constant,

$$mM = z = k s_1.$$

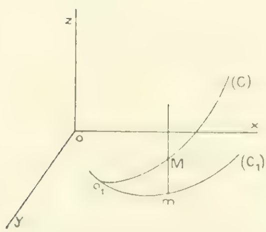
D'autre part, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad dx^2 + dy^2 = ds_1^2,$$

d'où

$$ds^2 = (1 + k^2)\, ds_1^2.$$

Fig. 37.



Nous allons déduire de là différentes conséquences. Nous avons, avec les notations de la théorie générale,

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{k\, ds_1}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}},$$

c'est-à-dire que γ est constant. *La tangente à l'hélice fait donc un angle constant avec la perpendiculaire au plan de la courbe* C_1.

Réciproquement, soit C une courbe telle que la tangente à cette courbe fasse un angle constant avec une direction fixe. Prenons Oz parallèle à cette direction; γ est constant. Comme on a $dz = \gamma\, ds$, on en déduit

$$z = \gamma s,$$

en choisissant convenablement l'origine des arcs sur la courbe C. Cela étant, projetons orthogonalement la courbe sur le plan des xy, et soit s_1 l'arc de la projection, en prenant pour origine la projection de l'origine des arcs de C. On a

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\, ds^2 = (1 - \gamma^2)\, ds^2$$

d'où, en intégrant,

$$s_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}\, s.$$

En comparant avec $z = \gamma s$, on en déduit

$$z = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\, s_1.$$

La courbe C peut donc être obtenue par la construction précédente ; c'est donc une hélice.

418. *Dans l'hélice, la normale principale est parallèle au plan de la courbe* C_1, c'est-à-dire, avec les axes choisis, perpendiculaire à Oz. En effet, on a, avec les notations habituelles,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R}.$$

Comme γ est constant, on en déduit

$$\gamma_1 = 0,$$

ce qui établit le fait. On peut encore le voir en considérant l'indicatrice sphérique. Le point (α, β, γ) décrit sur la sphère de rayon 1 un petit cercle dans un plan parallèle au plan Oxy. La tangente à ce cercle et, par suite, la normale principale sont constamment parallèles au plan xOy.

Soient R et R_1 les rayons de courbure de C et C_1.

Le rapport de R *à* R_1 *est constant*. On a, en effet,

$$R^2 = \frac{ds^2}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}, \qquad R_1^2 = \frac{ds_1^2}{d\alpha^2 + d\beta^2},$$

et, comme $d\gamma$ est nul, on a

$$\frac{R}{R_1} = \left.\frac{ds}{ds_1}\right| = \sqrt{1 + k^2}.$$

419. Montrons enfin que *le rapport des rayons de courbure et de torsion d'une hélice est constant*. En effet, nous avons vu que γ est constant et que γ_1 est nul. Donc γ_2 est constant. La formule

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma_2}{T}$$

devient alors

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma_2}{T} = 0,$$

d'où

$$\frac{R}{T} = \text{const.}$$

Réciproquement, *toute courbe pour laquelle $\frac{R}{T}$ est constant est une hélice*. En effet, on a, les axes de coordonnées étant supposés

rectangulaires,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}, \qquad \ldots,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha} = \frac{d\beta_2}{d\beta} = \frac{d\gamma_2}{d\gamma} = \frac{R}{T}.$$

Soit k la valeur constante du rapport $\frac{R}{T}$, k étant fini et différent de o. On tire de là

$$\alpha_2 = k\alpha + c, \qquad \beta_2 = k\beta + c', \qquad \gamma_2 = k\gamma + c'',$$

c, c', c'' étant des constantes. En multipliant ces relations par α, β, γ, et ajoutant, on a

$$o = k + c\alpha + c'\beta + c''\gamma,$$
$$c\alpha + c'\beta + c''\gamma = -k.$$

Cette relation montre d'abord que c, c', c'' ne sont pas tous trois nuls, de sorte qu'il y a une direction dont les coefficients sont proportionnels à c, c', c'', et ensuite que cette direction fait avec la tangente de coefficients α, β, γ un angle constant.

La courbe est donc une hélice.

Si l'une des quantités R ou T est constante, l'autre l'est aussi; la courbe C_1, qui sert à définir l'hélice, est un cercle, car son rayon de courbure R_1 est constant; on a alors une *hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution. C'est la seule courbe pour laquelle la courbure et la torsion soient constantes* (tout en ayant des valeurs finies et différentes de o).

VI. — Équations intrinsèques des courbes.

420. *Courbes planes.* — Considérons une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires, les coordonnées d'un point de cette courbe étant données en fonction d'un paramètre t. L'arc s de la courbe, compté à partir d'une certaine origine, et le rayon de courbure ρ sont deux fonctions de t. Si l'on élimine t entre ces deux expressions, on a une relation entre ρ et s, soit $\rho = \varphi(s)$.

Soit θ l'angle avec Ox de la direction positive de la tangente; on a

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta.$$

La quantité $d\sigma^2$ définie dans la théorie générale est ici égale à $d\alpha^2 + d\beta^2$, c'est-à-dire à $d\theta^2$; donc

$$\rho = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|.$$

Cela posé, étant donnée une relation $\rho = \varphi(s)$, cherchons une courbe dont le rayon de courbure et l'arc satisfassent à cette équation. Supposons d'abord que θ et s croissent en même temps ; on aura

$$\rho = \frac{ds}{d\theta},$$

d'où

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{\varphi(s)},$$

d'où, en intégrant et désignant par θ_0 la valeur de θ qui correspond à l'origine des arcs,

$$\theta - \theta_0 = \int_0^s \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point origine des arcs ; on aura, en intégrant les relations $dx = \alpha\, ds$, $dy = \beta\, ds$,

$$x - x_0 = \int_0^s \cos\theta\, ds, \qquad y - y_0 = \int_0^s \sin\theta\, ds.$$

On a ainsi les coordonnées d'un point de la courbe.

En partant de l'hypothèse où θ et s varient en sens inverse, on ferait les mêmes calculs en remplaçant φ par $-\varphi$. Dans les deux cas, on trouve une courbe dont la forme est bien déterminée. En effet, les constantes arbitraires dont dépend cette courbe sont θ_0, x_0, y_0. A différentes valeurs de θ_0 correspondent différentes courbes qui peuvent s'obtenir par le déplacement de l'une d'elles dans le plan : de deux courbes correspondant aux valeurs θ_0, θ'_0, par exemple, la seconde ne diffère de la première que par ce fait qu'elle a tourné de l'angle $\theta'_0 - \theta_0$. De même, à différentes valeurs de x_0, y_0 correspondent des courbes qui se déduisent les unes des autres par des translations.

En second lieu, suivant que l'on prend pour ρ la valeur $\frac{ds}{d\theta}$ ou la valeur $-\frac{ds}{d\theta}$, on a pour θ deux séries de valeurs opposées. On reconnaît que les deux séries de courbes qui correspondent à ces valeurs peuvent être obtenues en partant de deux courbes symétriques l'une

par rapport à l'autre et donnant à chacune d'elles toutes les positions dans le plan.

En résumé, nous trouvons une infinité de courbes satisfaisant à la relation $\rho = \varphi(s)$, toutes ces courbes ayant même forme et ne différant entre elles que par leur position dans le plan. L'équation $\rho = \varphi(s)$ est dite *l'équation intrinsèque* de ces courbes.

421. *Courbes gauches.* — Remarquons que, pour une courbe quelconque, x, y, z étant définis en fonction d'un paramètre t, s se trouve défini en fonction de ce paramètre. On peut inversement exprimer t, puis x, y, z en fonction de s, qui est alors le paramètre.

Supposons que, pour une courbe, on connaisse R et T en fonction de s, soit $R = \varphi(s)$, $T = \psi(s)$, les fonctions φ et ψ étant holomorphes, c'est-à-dire développables en séries entières. Supposons de plus que les coordonnées x, y, z soient, au voisinage d'une certaine valeur t_0, développables en séries entières; soit s_0 la valeur de s correspondante. s est fonction holomorphe de t, t est fonction holomorphe de s et, par suite, x, y, z sont fonctions holomorphes de s. Cherchons leurs développements en séries entières par rapport à s. Nous aurons

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 (s - s_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 (s - s_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nx}{ds^n}\right)_0 (s - s_0)^n + \ldots.$$

Tout revient à avoir $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{d^2x}{ds^2}$, ... On a

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \ldots.$$

Admettons que l'on ait d'une façon générale

$$\frac{d^nx}{ds^n} = A_n\alpha + B_n\alpha_1 + C_n\alpha_2,$$

$$\frac{d^ny}{ds^n} = A_n\beta + B_n\beta_1 + C_n\beta_2,$$

$$\frac{d^nz}{ds^n} = A_n\gamma + B_n\gamma_1 + C_n\gamma_2,$$

A_n, B_n, C_n étant certaines fonctions de s. Dérivons ces expressions et utilisons les formules de Frenet; il vient

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} = A'_n\alpha + B'_n\alpha_1 + C'_n\alpha_2 + A_n\frac{\alpha_1}{R} - B_n\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha_2}{T}\right) + C_n\frac{\alpha_1}{T}.$$

Il suffit de poser

$$A_{n+1} = A'_n - \frac{B_n}{R}, \qquad B_{n+1} = B'_n + \frac{A_n}{R} + \frac{C_n}{T}, \qquad C_{n+1} = C'_n - \frac{B_n}{T}.$$

pour retrouver une expression de même forme que l'expression de $\frac{d^n x}{ds^n}$. En particulier, pour les dérivées premières, secondes et troisièmes, on a

$$A_1 = 1, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 0,$$

$$A_2 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{R}, \qquad C_2 = 0,$$

$$A_3 = -\frac{1}{R^2}, \qquad B_3 = \frac{-R'}{R^2}, \qquad C_3 = -\frac{1}{RT}.$$

On peut ainsi calculer de proche en proche $\frac{d^n x}{ds^n}, \frac{d^n y}{ds^n}, \frac{d^n z}{ds^n}$, dès que R et T sont connus en fonction de s, et, par suite, avoir les développements de x, y, z.

Donnons-nous arbitrairement le point x_0, y_0, z_0, la tangente en ce point et la direction de la normale principale dans le plan normal, ce qui correspond à *six* paramètres arbitraires. Une fois ces éléments fixés, les neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots$ sont déterminés, ainsi que tous les coefficients qui figurent dans le développement de x, y, z ; on a une courbe bien déterminée.

La forme d'une courbe est donc déterminée par les relations qui donnent R et T en fonction de s. Ces relations s'appellent les *équations intrinsèques de la courbe*.

VII. — Étude d'une surface au voisinage d'un point.

422. Considérons une surface définie par des équations de la forme

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

u, v étant deux paramètres indépendants.

u, v constituent un système de *coordonnées curvilignes* auxquelles est rapportée la surface. On obtient une courbe tracée sur la surface en établissant une relation entre u et v. Nous avons, en différentiant (1),

$$(2) \quad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

Les coefficients de la tangente à cette courbe au point (x, y, z)

sont proportionnels à dx, dy, dz. Étant donné un point déterminé de la surface, on reconnaît que les tangentes aux différentes courbes tracées sur la surface et passant par ce point sont toutes contenues dans le plan qui a pour équation

$$(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + (Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + (Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0.$$

Ce plan est le *plan tangent* à la surface au point (x, y, z).

Nous poserons, dans cette étude,

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \qquad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \qquad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

423. Calculons, pour une courbe tracée sur la surface, le carré de l'élément linéaire de l'arc, c'est-à-dire la quantité désignée par ds^2. On a, d'après (2), en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

en posant

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

les signes $\sum$ étant appliqués aux lettres x, y, z. Entre ces quantités E, F, G et les quantités A, B, C déjà définies, on a d'ailleurs la relation suivante (identité de Lagrange) :

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Désignons par H la quantité positive $\sqrt{EG - F^2}$ et rappelons que nous avons trouvé comme expression de l'aire d'une surface courbe

$$\int\int H\,du\,dv.$$

424. Les courbes de la surface obtenues en donnant à l'un des paramètres une valeur fixe sont dites *courbes coordonnées* sur la surface. Elles forment sur celle-ci deux familles, et par un point donné de la surface passe une courbe et une seule de chaque famille. Évaluons l'angle θ que font entre elles les deux courbes passant par le point (x, y, z). Si nous considérons la courbe $v =$ const., les différentielles dx, dy, dz correspondantes sont proportionnelles à $\frac{\partial x}{\partial u}$,

$\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, de sorte que les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe sont

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

De même, les cosinus de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ sont

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

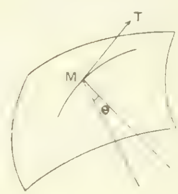
On en déduit

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{EG}}\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Quand on a $F = 0$, les deux courbes sont orthogonales. Si cette condition est remplie en tout point, on a, sur la surface, un système de *coordonnées orthogonales*.

425. Nous allons étudier la courbure des différentes courbes tracées sur la surface en un point. Étant donné un point M de la surface (*fig.* 38), la normale en M à la surface a pour coefficients A, B, C;

Fig. 38.



ses cosinus sont $\pm\frac{A}{H}$, $\pm\frac{B}{H}$, $\pm\frac{C}{H}$. Nous conviendrons d'appeler *direction positive sur la normale* celle qui a pour cosinus $\frac{A}{H}$, $\frac{B}{H}$, $\frac{C}{H}$.

Cela posé, considérons une courbe quelconque C tracée sur la surface et passant par M. Le plan osculateur à C en M passe par la tangente MT. Il suffit, pour le définir, de donner la normale principale en M, laquelle est une droite perpendiculaire à MT. Soit θ l'angle de la direction positive de cette normale principale avec la direction positive de la normale à la surface. En adoptant pour la courbe C les notations employées précédemment, nous avons

$$\cos\theta = \frac{A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1}{H},$$

ou, en introduisant le rayon de courbure R de la courbe en M, au moyen des formules de Frenet, $\frac{\alpha_1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$, ...,

$$\frac{H\cos\theta}{R} = \frac{A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma}{ds}.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad d\alpha = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \qquad \ldots,$$

d'où, comme on a $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$,

$$\frac{H\cos\theta}{R} = \frac{A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z}{ds^2}.$$

Évaluons d^2x, d^2y, d^2z; on a, par exemple,

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v.$$

En formant la combinaison $A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z$, on voit que dans cette expression les termes en d^2u et d^2v ont leurs coefficients nuls, de sorte qu'il reste une forme quadratique en du, dv. Nous écrirons

$$\frac{H\cos\theta}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{ds^2},$$

en posant

$$E_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad G_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

c'est-à-dire

$$E_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}.$$

En remplaçant ds^2 par son expression en du, dv, nous avons la

formule fondamentale

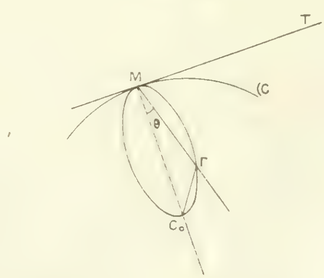
$$(1) \qquad \frac{H\cos\theta}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

426. Cette formule montre que le rayon de courbure d'une courbe tracée sur la surface est déterminé dès que l'on se donne, d'une part, le rapport $\frac{dv}{du}$ et, d'autre part, l'angle θ. Le rapport $\frac{dv}{du}$ fixe la position de la tangente à la courbe, et l'angle θ fixe ensuite la position de la normale principale, c'est-à-dire du plan osculateur. En d'autres termes, le rayon de courbure ne dépend que de la position du plan osculateur; il est le même pour toutes les courbes passant par M et ayant en ce point même plan osculateur. De plus, la direction positive de la normale principale est la même pour toutes ces courbes: $\cos\theta$ a, en effet, un signe déterminé, le signe du second membre de (1).

L'angle θ est donc toujours aigu ou toujours obtus; donc *toutes les courbes ayant même tangente et même plan osculateur en* M *ont même centre de courbure.*

427. Théorème de Meusnier. — Faisons varier θ en laissant fixe le rapport $\frac{dv}{du}$, c'est-à-dire considérons des courbes C tracées sur la surface, passant par M et assujetties seulement à avoir même tangente MT. La formule (1) montre que pour ces courbes le rap-

Fig. 39.



port $\frac{\cos\theta}{R}$ demeure constant. Considérons en particulier, parmi ces courbes, la section de la surface par le plan qui contient MT et la normale en M à la surface; pour cette courbe, θ est égal à 0 ou π, $|\cos\theta| = 1$; par suite, en désignant par ρ son rayon de courbure,

on a

$$\frac{|\cos\theta|}{R} = \frac{1}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad R = \rho|\cos\theta|.$$

Cela montre (*fig.* 39) que *le centre de courbure* Γ *de la courbe* C *est la projection orthogonale, sur la normale principale à* C, *du centre de courbure* C_0 *de la section normale passant par* MT.

Il en résulte que, pour les courbes C, le lieu de Γ est, dans le plan perpendiculaire à MT, un cercle décrit sur MC_0 comme diamètre.

428. Un cas particulier important de la représentation paramétrique des surfaces est celui où l'on prend comme paramètres deux des variables x, y, z. Supposons, par exemple, que l'on prenne x, y: la surface sera définie par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$

Posons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

On a d'abord

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2.$$

Formons le tableau des dérivées premières de x, y, z par rapport aux paramètres

$$\begin{matrix} 1, & 0, & p, \\ 0, & 1, & q. \end{matrix}$$

Les quantités que nous avons désignées par A, B, C sont remplacées par $-p$, $-q$, 1. Calculons E, F, G, H; on reconnaît qu'on a

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2, \qquad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

puis, en calculant de même E_1, F_1, G_1, on trouve

$$E_1 = r, \qquad F_1 = s, \qquad G_1 = t.$$

En prenant pour direction positive sur la normale à la surface en un point M la direction de paramètres $\dfrac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, $\dfrac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, et désignant par θ l'angle de cette direction avec la normale principale à une courbe tracée sur la surface en M, la for-

mule (1) devient

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\cos\theta = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2}.$$

Établissons cette formule directement : soit une surface ayant pour équation

$$z = f(x, y).$$

L'angle θ étant défini comme précédemment, on a, avec les notations déjà employées,

$$\cos\theta = \frac{-p\alpha_1 - q\beta_1 + \gamma_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

d'où

$$\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{-p\,d\alpha - q\,d\beta + d\gamma}{ds}.$$

La tangente à la courbe étant dans le plan tangent à la surface, on a

$$-p\alpha - q\beta + \gamma = 0,$$

d'où, en différentiant,

$$-p\,d\alpha - q\,d\beta + d\gamma - \alpha\,dp - \beta\,dq = 0.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{\alpha\,dp + \beta\,dq}{ds}.$$

Or, nous avons

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

d'où, en remplaçant dp et dq par ces valeurs, puis dx et dy par $\alpha\,ds$ et $\beta\,ds$,

$$(3) \qquad \frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

En remplaçant α, β par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, puis ds^2 par sa valeur, on retrouve la formule (2).

429. Pour étudier la courbure des courbes tracées sur la surface en M, il suffit donc d'étudier la courbure des sections de la surface par des plans normaux en M. Pour ces courbes, θ est égal soit à o, soit à π. Nous conviendrons de compter comme positif le rayon de courbure R d'une section normale s'il est dirigé suivant la direction

positive de la normale à la surface et comme négatif s'il est dirigé en sens inverse. Moyennant cette convention, R devient une quantité algébrique qui est définie en grandeur et en signe par la relation

$$\frac{H}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

ou, si x, y sont les paramètres, par la relation

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Plaçons-nous dans ce dernier cas et portons l'origine des coordonnées au point M que l'on étudie, de façon que le plan tangent en M devienne le plan des xy. On a alors, pour M,

$$p = q = 0.$$

La formule précédente devient

$$\frac{1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

R étant le rayon de courbure compté algébriquement sur l'axe Oz. Soit ω l'un des angles de la tangente à la section normale considérée avec Ox; on a

$$\alpha = \cos\omega, \qquad \beta = \sin\omega,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega.$$

C'est au moyen de cette formule que nous allons étudier les variations du rayon de courbure pour les différentes sections normales en M.

130. *Indicatrice.* — Sur la tangente MT, portons à partir de M, de part et d'autre de M, une longueur $M\mu$ égale à $\sqrt{|R|}$. Le lieu du point μ quand ω varie est appelé l'*indicatrice*. Nous allons étudier cette courbe. Soient ξ, η les coordonnées de μ; nous avons

$$\xi = \sqrt{|R|}\cos\omega, \qquad \eta = \sqrt{|R|}\sin\omega.$$

Écrivons que $\cos\omega$ et $\sin\omega$ satisfont à la relation (4) : il vient

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = \pm 1.$$

C'est l'équation du lieu du point μ. Il y a trois cas à examiner

suivant le signe de la quantité $rt - s^2$ qui est le discriminant de la forme quadratique en ξ, η du premier membre :

1° $rt - s^2 > 0$. Le trinome $r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\cos^2\omega$, et par suite aussi R, a un signe constant. Cela montre que, pour toutes les sections normales, le centre de courbure est du même côté du plan tangent. Ces différentes sections ont donc toutes leur concavité tournée d'un même côté. Au voisinage du point M la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent : on dit qu'elle est *convexe* en M. L'indicatrice est, comme on le voit, une ellipse.

2° $rt - s^2 < 0$. Le trinome en ω est tantôt positif, tantôt négatif, suivant les valeurs de $\tan g\,\omega$. Il en est de même de R, de sorte que les sections normales ont leur concavité les unes d'un côté du plan tangent, les autres de l'autre côté. La surface est, au voisinage de M, de part et d'autre du plan tangent. Il y a en outre deux directions pour lesquelles le trinome en ω s'annule. Pour chacune d'elles on a $\frac{1}{R} = 0$, c'est-à-dire qu'il y a inflexion pour la section normale correspondante : on dit que la surface est *à courbures opposées*. Quant à l'indicatrice, elle se compose de deux branches d'hyperboles conjuguées ayant pour asymptotes les deux droites correspondant aux valeurs de ω pour lesquelles le trinome s'annule. Les deux asymptotes de l'indicatrice sont dites *tangentes principales*.

3° $rt - s^2 = 0$. Le trinome en ω a un signe constant, mais est nul pour une certaine valeur de $\tan g\,\omega$. Pour la section correspondante R est infini ; il y a donc inflexion en M. Toutes les autres sections ont leur concavité tournée d'un même côté du plan tangent. Quant à l'indicatrice, elle se compose de deux droites parallèles.

Considérons, dans les trois cas, les directions des axes de l'indicatrice. Pour ces directions, R est maximum ou minimum. On appelle ces valeurs de R les *rayons de courbure principaux* en M. Les sections normales correspondantes sont les *sections principales* en M.

On appelle *ombilic* un point pour lequel l'indicatrice est un cercle ; en un tel point, R est constant pour toutes les sections normales. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait, dans le système particulier d'axes choisis,

$$s = 0, \qquad r = t.$$

131. L'indicatrice nous apparaît dans cette théorie comme une courbe auxiliaire représentative. On peut encore la considérer sous un aspect différent. Prenons les mêmes axes que précédemment et

supposons que z soit représenté par une fonction de x, y développable par la formule de Taylor. Le plan tangent en M étant le plan des xy, z ne contiendra pas de termes du premier degré en x, y; les termes du second degré seront $rx^2 + 2sxy + ty^2$ et l'on aura, en arrêtant la formule de Taylor au troisième terme,

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{3}_{\theta x, \theta y}.$$

Le plan tangent en M coupe la surface suivant la courbe ayant pour équation dans son plan

$$0 = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{(3)}_{\theta x, \theta y};$$

c'est une courbe pour laquelle l'origine est un point double. Les tangentes à cette courbe en ce point sont les *tangentes principales*. Elles sont imaginaires, confondues ou réelles suivant que $rt - s^2$ est positif, nul ou négatif.

Coupons maintenant la surface par un plan parallèle au plan tangent, soit $z = h$, et projetons la section sur le plan tangent; cette projection a pour équation

$$h = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{3}_{\theta x, \theta y}.$$

Transformons cette projection en posant

$$X = \lambda x, \qquad Y = \lambda y,$$

λ étant un certain facteur qui reste à déterminer.

L'équation de la courbe transformée est

$$h = \frac{1}{2\lambda^2}(rX^2 + 2sXY + tY^2) + \frac{1}{6\lambda^3}\left[X^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left(\frac{\theta X}{\lambda}, \frac{\theta Y}{\lambda}\right) + \ldots\right]$$

ou

$$2h\lambda^2 = (rX^2 + 2sXY + tY^2) + \frac{1}{3\lambda}\left[X^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left(\frac{\theta X}{\lambda}, \frac{\theta Y}{\lambda}\right) + \ldots\right].$$

Prenons λ tel que l'on ait

$$2|h|\lambda^2 = 1.$$

Cela étant, faisons tendre h vers zéro; nous devons, pour conserver la relation entre λ et h, faire croître λ indéfiniment. Nous sommes conduits à dire que la courbe obtenue tend, dans ces conditions, vers la courbe ayant pour équation

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = \pm 1.$$

Ceci conduit à la définition suivante de l'indicatrice : *on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce plan. On amplifie la section ainsi obtenue suivant la loi indiquée. L'indicatrice est la limite vers laquelle tend la courbe transformée, lorsque le plan sécant vient se confondre avec le plan tangent.*

132. Prenons, par exemple, la surface ayant pour équation

$$z = x^2 + 2y^2 + \varphi_3(x, y),$$

φ_3 étant un polynome de degré supérieur ou égal à 3. L'indicatrice est une ellipse.

Pour la surface

$$z = x^2 - 2y^2 + \varphi_3(x, y),$$

φ_3 ayant la même signification, c'est une hyperbole. Enfin, pour la surface

$$z = x^2 - y^3,$$

c'est une parabole.

133. *Courbure totale.* — Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux (nº 130) en un point d'une surface. On appelle *courbure totale* en ce point le produit $\frac{1}{R_1 R_2}$, c'est-à-dire le produit des courbures des sections principales.

La courbure totale en un point est positive si la surface est convexe en ce point, négative si la surface est à courbures opposées en ce point. Enfin elle est nulle en tout point où l'indicatrice est parabolique.

On appelle *courbure moyenne* l'expression $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Si l'on considère deux sections normales rectangulaires correspondant, par exemple, aux angles ω, $\omega + \frac{\pi}{2}$, et si l'on désigne par R et R′ leurs rayons de courbure, on a

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega - 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega,$$

$$\frac{1}{R'} = r\sin^2\omega - 2s\sin\omega\cos\omega + t\cos^2\omega,$$

d'où résulte

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = r + t = \text{const.}$$

134. Aux études précédentes se rattache l'étude des fonctions de deux variables réelles. Étudier une fonction $f(x, y)$ de deux variables revient, en effet, à étudier la surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Étant donnée une fonction $z = f(x, y)$, il y a maximum pour cette fonction au point (x_0, y_0), si dans un certain champ des variables x, y auquel est intérieur le point (x_0, y_0), on a constamment

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Si, au contraire, on a constamment

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

il y a minimum au point (x_0, y_0).

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut évidemment qu'il y ait maximum ou minimum quand l'une des variables varie seule, l'autre recevant une valeur fixe. On en déduit, comme conditions nécessaires d'un maximum ou minimum, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ doivent être nulles au point considéré. (On obtient le même résultat si, au lieu de deux variables, on en a un nombre quelconque.)

Supposons ces conditions remplies en un point (x_0, y_0). La question de savoir si la fonction a, en ce point, un maximum ou un minimum, se ramène à l'étude de la forme de la surface au voisinage du point (x_0, y_0).

En conservant les notations précédentes, si $rt - s^2$ est positif, l'indicatrice est une ellipse, il y a effectivement maximum ou minimum. Si $rt - s^2$ est négatif, l'indicatrice est une hyperbole, il n'y a ni maximum, ni minimum. Si $rt - s^2$ est nul, le cas doit être considéré comme douteux; il y a lieu de faire une étude complémentaire.

135. Revenons aux coordonnées curvilignes générales; nous avons obtenu la formule

$$\frac{H}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Il en résulte, d'après l'étude classique des fractions du second degré, que, pour que $\frac{1}{R}$ soit constant, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

Ce sont les conditions pour que le point soit un *ombilic* (n° 430). Lorsque l'on prend x, y comme variables indépendantes, nous avons vu que l'on obtenait la formule

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2}.$$

Les conditions pour qu'il y ait ombilic sont

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

VIII. — Lignes asymptotiques.

436. *On appelle ligne asymptotique d'une surface une ligne tracée sur cette surface et qui, en chaque point, est tangente à une des tangentes principales, c'est-à-dire à l'une des asymptotes de l'indicatrice en ce point.* Pour qu'il y ait une ligne asymptotique réelle passant par un point, il faut qu'en ce point l'indicatrice soit non elliptique, c'est-à-dire que la surface soit à courbures opposées.

Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales. Il s'agit de trouver une relation entre u et v telle que le point dont les coordonnées curvilignes vérifient cette relation décrive une ligne asymptotique de la surface. Or, en tout point d'une telle courbe, la tangente coïncidant avec une asymptote de l'indicatrice, la section normale passant par cette tangente a un rayon de courbure infini. La formule générale qui donne $\frac{H}{R}$ montre que, dans ces conditions, u et v doivent être liés par la relation

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = 0.$$

On dit que cette relation est l'*équation différentielle des lignes asymptotiques*. C'est une équation du second degré en $\frac{dv}{du}$. En la résolvant, on est conduit à deux équations de la forme

$$\frac{dv}{du} = \varphi_1(u, v), \qquad \frac{dv}{du} = \varphi_2(u, v).$$

Chacune de ces équations admet une intégrale dépendant d'une constante arbitraire.

Il existe donc sur la surface deux familles de lignes asymptotiques, dont chacune dépend d'une constante arbitraire. Par un point de la surface passe en général une courbe de chaque famille et une seule.

Ces courbes sont réelles si $E_1 G_1 - F_1^2 < 0$ (c'est le cas d'un point où la surface est à courbures opposées), imaginaires si $E_1 G_1 - F_1^2 > 0$ (cas de la surface convexe). Enfin, si $E_1 G_1 - F_1^2 = 0$ (point parabolique), il n'y a plus qu'une tangente principale.

Supposons maintenant que x, y soient les variables indépendantes. Le raisonnement est le même, et l'on trouve que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on obtient deux équations différentielles du premier ordre; chacune d'elles correspond à une famille de lignes asymptotiques qui dépend d'une constante arbitraire.

437. *En tout point d'une ligne asymptotique, le plan osculateur à cette ligne coïncide avec le plan tangent à la surface en ce point.* En effet, prenons les coordonnées curvilignes générales; le plan tangent à la surface au point (u, v) ayant pour coefficients A, B, C, les conditions pour que le point (u, v) décrive une ligne dont le plan osculateur en chaque point soit le plan tangent à la surface sont

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

La première condition est vérifiée pour toute courbe tracée sur la surface. D'après un calcul fait précédemment (n° 425, p. 219), le premier membre de la seconde est égal à

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Cette seconde condition est donc équivalente à

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = 0.$$

Il en résulte qu'il y a bien identité entre les courbes ainsi définies et les lignes asymptotiques.

438. Cherchons les lignes asymptotiques sur une surface réglée. Les génératrices de la surface en constituent une première famille. En effet, en un point M de la surface, la droite qui passe par ce point est dans le plan tangent et constitue une section normale de la surface à rayon de courbure infini. C'est donc l'une des deux tangentes

principales, de sorte qu'elle constitue une courbe qui, en chacun de ses points, est tangente à une tangente principale.

En particulier, pour une surface réglée du second degré, les tangentes principales en chaque point sont les deux génératrices de la surface qui passent par ce point. L'indicatrice est, en tout point, hyperbolique, et les lignes asymptotiques de la surface sont ses deux familles de génératrices.

Dans le cas général d'une surface réglée, cherchons l'équation différentielle de la seconde famille de lignes asymptotiques. Supposons la surface définie par les équations

$$x = x_0 + \alpha u, \qquad y = y_0 + \beta u, \qquad z = z_0 + \gamma u,$$

x_0, y_0, z_0, α, β, γ étant des fonctions données d'un paramètre v. Quand u varie, v restant fixe, le point (x, y, z) décrit une droite; en d'autres termes, $v =$ const. représente la famille de génératrices rectilignes de la surface. Calculons les fonctions E_1, F_1, G_1, nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v} + u\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y_0}{\partial v} + u\frac{\partial \beta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z_0}{\partial v} + u\frac{\partial \gamma}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0.$$

E_1, qui est le déterminant formé avec ces neuf quantités, est donc nul. Il en résulte que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est de la forme

$$2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2 = 0.$$

Elle admet donc la solution $dv = 0$ ou $v =$ const. Nous retrouvons ainsi comme première solution les génératrices de la surface. Pour calculer F_1 et G_1, formons $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, $\ldots$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\ldots$. On a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} + u\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}, \qquad \ldots,$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} + u\frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial y_0}{\partial v} + u\frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial z_0}{\partial v} + u\frac{\partial \gamma}{\partial v} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} + u\frac{\partial \alpha}{\partial v} & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} + u\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

En développant, on voit que F_1 ne dépend pas de u; c'est une

fonction de v. En formant de même G_1, on obtient un polynome du second degré en u, dont les coefficients sont des fonctions de v. D'autre part, l'équation différentielle de la seconde famille de lignes asymptotiques est

$$2F_1\,du + G_1\,dv = 0.$$

D'après ce que nous venons de voir pour F_1 et G_1, elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0,$$

L, M, N étant des fonctions de v. C'est une équation de Riccati.

439. *Tangentes conjuguées.* — Étant donné un point M d'une surface S, nous dirons que deux droites menées par M dans le plan tangent à S sont deux tangentes conjuguées par rapport à S si ces deux droites sont conjuguées par rapport à l'indicatrice. Cela revient, comme on sait, à dire qu'elles sont conjuguées par rapport aux asymptotes de l'indicatrice.

Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales. Considérons une courbe tracée sur la surface et posons, pour cette courbe, $\frac{dv}{du} = \mu$. Cette quantité μ définit en chaque point la direction de la tangente à la courbe. Projetons cette courbe sur le plan des xy par exemple, et soit m le coefficient angulaire de la tangente à la projection. On a

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv}{\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} + \mu\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} + \mu\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

On reconnaît ainsi que m et μ sont liés par une relation homographique.

Cela posé, rappelons que le coefficient μ relatif aux asymptotes de l'indicatrice est défini par l'équation

$$E_1 + 2F_1\mu + G_1\mu^2 = 0. \tag{1}$$

Pour que deux directions de coefficients μ et μ' soient deux directions de tangentes conjuguées, il faut et il suffit que leurs projections sur le plan des xy par exemple, de coefficients m et m', soient conjuguées par rapport aux asymptotes de la projection de l'indicatrice. Il en résulte, à cause de la relation homographique qui existe entre μ

et m d'une part, μ' et m' d'autre part, que μ et μ' doivent être conjugués par rapport aux racines de l'équation (1). La condition pour qu'il en soit ainsi est, comme l'on sait,

$$E_1 + F_1(\mu + \mu') + G_1\mu\mu' = 0.$$

En posant $\mu = \dfrac{dv}{du}$, $\mu' = \dfrac{\delta v}{\delta u}$, cette relation s'écrit

$$E_1\, du\, \delta u + F_1(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G_1\, dv\, \delta v = 0.$$

Cherchons à obtenir directement cette condition dans le cas où x, y sont variables indépendantes. L'indicatrice en un point a pour projection sur le plan des xy une conique homothétique à la conique ayant pour équation

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = \text{const.}$$

Pour que m et m' soient, dans le plan des xy, les coefficients angulaires des projections de deux tangentes conjuguées, il faut et il suffit que l'on ait

$$r + s(m + m') + tmm' = 0,$$

ou, en posant $m = \dfrac{dy}{dx}$, $m' = \dfrac{\delta y}{\delta x}$,

$$r\, dx\, \delta x + s(dx\, \delta y + dy\, \delta x) + t\, dy\, \delta y = 0.$$

En un point d'une surface, deux tangentes conjuguées sont distinctes, à moins qu'elles ne coïncident avec une tangente principale.

140. Si deux familles de courbes tracées sur la surface, telles qu'il passe par chaque point une courbe de chaque famille et une seule, sont en outre telles que leurs tangentes en chaque point sont deux droites conjuguées, on dit que ces deux familles de courbes forment *deux familles conjuguées*.

Supposons qu'on se donne une première famille de courbes telle que par chaque point de la surface passe une courbe de cette famille et une seule. Le coefficient angulaire m de la tangente à cette courbe en chaque point est déterminé, et par suite le coefficient angulaire m' de la tangente conjuguée est aussi déterminé. Nous pourrons donc trouver une seconde famille formant avec la première un système conjugué, en déterminant une famille telle qu'en chaque point de la surface le coefficient angulaire de la tangente soit égal à m', c'est-à-dire à une fonction déterminée et connue des coordonnées.

Si l'on prend pour variables indépendantes x, y, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ sera connu en chaque point ; en d'autres termes, la seconde famille sera déterminée par l'équation différentielle de sa projection sur le plan des xy.

441. Soient C une courbe tracée sur une surface S, M un point variable de C. Quand M décrit C, le plan tangent en M à la surface S varie en fonction d'un paramètre et, par suite, enveloppe une certaine surface Σ. Soit Δ la caractéristique du plan tangent, c'est-à-dire la droite qui engendre Σ. Je dis qu'*en chaque point de* C, Δ *est conjuguée de la tangente à* C. En effet, le plan tangent a pour équation, en prenant x, y comme variables indépendantes,

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0.$$

Adjoignons à cette équation l'équation obtenue en différentiant :

$$dp(X-x)+dq(Y-y)-p\,dx-q\,dy+dz=0.$$

Or, pour tout déplacement du point (x, y, z) sur la courbe C, on a

$$p\,dx+q\,dy-dz=0.$$

La seconde équation se réduit donc à

$$dp(X-x)+dq(Y-y)=0.$$

C'est l'équation de la projection de Δ sur le plan des xy. Le coefficient angulaire m' de cette projection est

$$m'=-\frac{dp}{dq}=-\frac{r\,dx+s\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

ou, en désignant par m la quantité $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la projection de la tangente à C,

$$m'=-\frac{r+sm}{s+tm}.$$

En mettant sous forme entière, on a entre m et m' la relation

$$r+s(m+m')+tmm'=0,$$

ce qui, d'après le n° 439, démontre la propriété indiquée.

IX. — Lignes de courbure.

442. *On appelle ligne de courbure d'une surface* S *une ligne tracée sur cette surface et tangente en chaque point à l'un des axes de l'indicatrice relative à ce point.* Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales et partons de la formule fondamentale relative aux sections normales (n° **429**, p. 223) :

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}.$$

D'après l'étude qui a été faite de la variation de R (n° **430**), le premier membre est maximum ou minimum quand la courbe correspondante est tangente à un axe de l'indicatrice. On aura donc les courbes tangentes à un axe de l'indicatrice en cherchant les valeurs de $\frac{dv}{du}$ qui rendent maximum ou minimum le second membre. Or, ce second membre est une fraction du second degré, et l'on sait qu'une expression de la forme $f = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$, où φ et ψ sont des polynomes homogènes et du second degré en x et y, est maximum ou minimum lorsqu'on a

$$f = \frac{\varphi'_x}{\psi'_x} = \frac{\varphi'_y}{\psi'_y}.$$

D'après cela, R est maximum ou minimum lorsqu'on a

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E}_1\,du + \mathrm{F}_1\,dv}{\mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv} = \frac{\mathrm{F}_1\,du + \mathrm{G}_1\,dv}{\mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv}.$$

En égalant les deux derniers rapports, on a la relation à laquelle doit satisfaire $\frac{dv}{du}$ pour que le point (u, v) correspondant décrive une ligne de courbure. Cette relation est l'*équation différentielle des lignes de courbure*. En la mettant sous forme entière, on obtient

$$(\mathrm{E}_1\mathrm{F} - \mathrm{E}\mathrm{F}_1)\,du^2 + (\mathrm{E}_1\mathrm{G} - \mathrm{E}\mathrm{G}_1)\,du\,dv + (\mathrm{F}_1\mathrm{G} - \mathrm{F}\mathrm{G}_1)\,dv^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré par rapport à $\frac{dv}{du}$. En la résolvant par rapport à $\frac{dv}{du}$, on obtient deux équations différentielles du premier ordre. A chacune de ces équations correspond une famille de lignes de courbure dépendant d'un paramètre arbitraire, de sorte que l'on a sur la surface deux familles de lignes de courbure, et que

par chaque point de la surface passe en général une ligne de chaque famille et une seule. L'ensemble de ces deux familles forme sur la surface un réseau de courbes à la fois orthogonales et conjuguées.

443. Revenons aux relations (2). On en déduit

$$(EH - E_1 R)\,du + (FH - F_1 R)\,dv = 0,$$
$$(FH - F_1 R)\,du + (GH - G_1 R)\,dv = 0.$$

Nous pouvons, entre ces deux relations, éliminer du et dv. L'équation du second degré en R que nous obtenons ainsi définit en chaque point les rayons de courbure principaux. C'est l'équation

$$(EH - E_1 R)(GH - G_1 R) - (FH - F_1 R)^2 = 0,$$

ou encore

$$(3) \qquad (E_1 G_1 - F_1^2) R^2 - (EG_1 + E_1 G - 2FF_1) HR + H^2 = 0.$$

On sait que le coefficient H est essentiellement différent de zéro en un point ordinaire. Cette équation n'a donc pas de racine nulle. Le coefficient de R^2 est $E_1 G_1 - F_1^2$; il est nul en tout point pour lequel les directions des asymptotes de l'indicatrice sont confondues, c'est-à-dire en tout point parabolique. En un tel point l'équation aux rayons de courbure principaux a donc une racine infinie.

Pour un ombilic, on a

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

On peut poser, dans ce cas,

$$E_1 = \lambda E, \qquad F_1 = \lambda F, \qquad G_1 = \lambda G.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux devient

$$(H - \lambda R)^2 = 0.$$

Elle a ses deux racines égales; l'indicatrice est bien un cercle, comme nous le savions déjà.

444. Dans le cas où l'on prend comme variables indépendantes x, y, la formule fondamentale qui définit le rayon de courbure d'une section normale est (n° 435, p. 228)

$$\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}.$$

En lui appliquant la même méthode, on est conduit à écrire pour un rayon de courbure principal et une courbe tangente aux axes de l'indicatrice

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}.$$

En égalant les deux derniers rapports, on a l'équation différentielle des lignes de courbure, ou plutôt de leurs projections sur le plan des xy :

$$\begin{aligned}[(1+p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\,dx\,dy \\ - [pqt - (1+q^2)s]\,dy^2 = 0.\end{aligned}$$

445. *Autre définition des lignes de courbure.* — Cherchons à déterminer sur une surface S une ligne telle que la normale à la surface en chaque point de cette ligne reste tangente à une courbe, par suite (n° 388, p. 180) engendre une surface développable. Prenons comme variables indépendantes x et y. La normale au point (x, y, z) a pour équations

$$\begin{aligned}X - x + p(Z - z) = 0,\\ Y - y + q(Z - z) = 0.\end{aligned}$$

Il s'agit de faire varier x, y en fonction d'un paramètre, de façon que cette droite reste tangente à une courbe. D'après l'étude des enveloppes de courbes (n° 383, p. 176), il faut exprimer que le système formé par les équations de la normale et ces équations différentiées par rapport au paramètre sont compatibles en X, Y, Z. Or, on obtient par différentiation

$$\begin{aligned}-dx + dp(Z - z) - p\,dz = 0,\\ -dy + dq(Z - z) - q\,dz = 0.\end{aligned}$$

Ces deux équations contiennent seulement Z; si elles donnent la même valeur pour Z, les deux premières équations fourniront X et Y, et le système sera compatible. Le point X, Y, Z ainsi déterminé sera tel que son déplacement s'effectuera tangentiellement à la droite elle-même.

En écrivant que ces deux équations sont compatibles en Z, on a la condition

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz},$$

ou, en exprimant dp, dq, dz en fonction de dx, dy,

$$\frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}.$$

Cette relation, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y d'un point de la courbe cherchée, est l'équation déjà obtenue pour les lignes de courbure (nº 144). On a donc le résultat suivant :

Les lignes de courbure sont les lignes telles que la normale à la surface le long de ces lignes reste tangente à une courbe, par suite engendre une surface développable.

Prenons, par exemple, une surface de révolution. En chaque point, la tangente à la méridienne est, par raison de symétrie, un axe de l'indicatrice. L'autre axe est la tangente au parallèle qui passe par ce point. Les méridiens et les parallèles forment les deux familles de lignes de courbure. Si l'on considère un parallèle, les normales à la surface le long de ce parallèle forment un cône ; on peut dire que leur enveloppe se réduit à un point, le sommet du cône. Les normales à la surface le long d'une méridienne forment un plan et sont, dans ce plan, tangentes à la développée de la méridienne.

146. Comme application des théories précédentes, cherchons les lignes de courbure du paraboloïde équilatère qui a pour équation

$$z = \frac{xy}{a}.$$

x, y étant les variables indépendantes, nous avons ici

$$p = \frac{y}{a}, \qquad q = \frac{x}{a}, \qquad r = 0, \qquad s = \frac{1}{a}, \qquad t = 0.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure devient

$$\frac{\frac{1}{a}\,dy}{\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)dx - \frac{xy}{a^2}\,dy} = \frac{\frac{1}{a}\,dx}{-\frac{xy}{a^2}\,dx + \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)dy},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)dx}{dy} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)dy}{dx}, \qquad \frac{dx^2}{x^2 + a^2} = \frac{dy^2}{y^2 + a^2},$$

d'où, en extrayant la racine carrée,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}.$$

En intégrant, on obtient

$$\mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 + a^2}) = \pm \mathrm{L}(y + \sqrt{y^2 + a^2}) + \text{const.},$$

d'où les équations des deux familles de lignes de courbure

$$(x - \sqrt{x^2 - a^2})(y + \sqrt{y^2 + a^2}) = \lambda,$$
$$(x + \sqrt{x^2 + a^2})(y - \sqrt{y^2 - a^2}) = \mu.$$

447. Comme second exemple, considérons la surface engendrée par une droite parallèle au plan des xy rencontrant oz et s'appuyant, en outre, sur une hélice circulaire ayant pour axe oz. C'est une surface de la famille des conoïdes appelée *hélicoïde à plan directeur*.

Définissons l'hélice en prenant pour paramètre l'angle θ, tel que les coordonnées d'un point de l'hélice soient (r étant fixe)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = a\theta.$$

On peut considérer l'hélicoïde comme défini par les mêmes équations, θ et r étant deux paramètres indépendants. Faire varier r, θ étant fixe, revient en effet à considérer tous les points de la génératrice de l'hélicoïde. En faisant ensuite varier θ, on obtient tous les points de la surface.

Formons le tableau des dérivées de x, y, z par rapport à r et θ :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = 0;$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = a;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial\theta} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0.$$

On en déduit, les coordonnées u, v de la théorie générale étant remplacées par r, θ,

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = r^2 + a^2,$$
$$E_1 = 0, \qquad F_1 = -a, \qquad G_1 = 0,$$
$$H = \sqrt{r^2 + a^2}.$$

Les équations générales donnant les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux (nº **442**, p. 234) deviennent

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{R} = -\frac{a\,d\theta}{dr} = -\frac{a\,dr}{(r^2 + a^2)\,d\theta}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est donc

$$\frac{dr^2}{r^2 + a^2} = d\theta^2,$$

d'où, en intégrant et désignant par θ_0 une constante arbitraire,

$$\theta - \theta_0 = \mathrm{L}\left(r + \sqrt{r^2 + a^2}\right).$$

L'équation aux rayons de courbure principaux s'obtient ici en égalant le carré du premier rapport (1) au produit des deux derniers : c'est donc

$$\frac{r^2 + a^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{a^2}{r^2 + a^2}$$

ou

$$\mathrm{R}^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2}{a^2}.$$

On voit qu'en chaque point, les rayons de courbure principaux sont deux nombres opposés.

On appelle *surface minima* une surface jouissant de cette propriété ; c'est *une surface dont l'indicatrice en chaque point est une hyperbole équilatère*.

448. *Développée d'une surface.* — Soit C une ligne de courbure sur une surface S. Nous avons vu que, si un point M se déplace sur C, la normale en M à la surface reste tangente à une courbe. Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales, et soient x, y, z les coordonnées de M, X, Y, Z celles du point de contact de la normale avec son enveloppe. Les cosinus de la direction positive sur la normale en M sont

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}, \qquad \mu = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}, \qquad \nu = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{H}},$$

et l'on a, en appelant ρ la distance du point M au point (X, Y, Z) comptée algébriquement sur la direction λ, μ, ν,

$$\mathrm{X} = x + \lambda\rho, \qquad \mathrm{Y} = y + \mu\rho, \qquad \mathrm{Z} = z + \nu\rho.$$

Écrivons que le déplacement du point (X, Y, Z) se fait tangentiellement à la normale, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d\mathrm{X}}{\lambda} = \frac{d\mathrm{Y}}{\mu} = \frac{d\mathrm{Z}}{\nu}.$$

Remplaçons dX, dY, dZ par leurs valeurs,

$$dX = dx + \lambda\, d\rho + \rho\, d\lambda, \qquad \ldots,$$

il vient, après réduction,

$$\frac{dx + \rho\, d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + \rho\, d\mu}{\mu} = \frac{dz + \rho\, d\nu}{\nu}.$$

En multipliant les deux termes du premier rapport par λ, ceux du deuxième par μ, ceux du troisième par ν et ajoutant, on obtient

$$\frac{\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz + \rho(\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

et ce nouveau rapport est égal à chacun des précédents. Son numérateur est d'ailleurs nul, car on a séparément

$$\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0, \qquad \lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0.$$

On doit donc avoir

$$dx + \rho\, d\lambda = 0, \qquad dy + \rho\, d\mu = 0, \qquad dz + \rho\, d\nu = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{d\mu}{dy} = -\frac{d\nu}{dz}.$$

En différentiant les formules $\lambda = \frac{A}{H}$, $\ldots$, on a

$$d\lambda = \frac{H\, dA - A\, dH}{H^2}, \qquad \ldots,$$

d'où, en remplaçant $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ par ces valeurs,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A\, dH - H\, dA}{H^2\, dx} = \frac{B\, dH - H\, dB}{H^2\, dy} = \frac{C\, dH - H\, dC}{H^2\, dz}$$

et, en multipliant les termes de ces trois rapports respectivement par dx, dy, dz et ajoutant,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-H(dA\, dx + dB\, dy + dC\, dz)}{H^2\, ds^2}.$$

Évaluons $\Sigma\, dA\, dx$. En différentiant la relation $\Sigma\, A\, dx = 0$, nous avons

$$\Sigma\, A\, d^2x + \Sigma\, dA\, dx = 0,$$

d'où, par un calcul déjà fait (n° 425),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Sigma\, A\, d^2x}{H\, ds^2} = \frac{E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2}{H(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)}.$$

On voit que l'on a $\rho = R$, R étant le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe lieu de M.

Donc *le point de contact de la normale en* M *avec son enveloppe, quand* M *décrit une ligne de courbure, est le centre de courbure de la section normale qui passe par* M *et qui est tangente en* M *à cette ligne.*

Entre $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ et R, on a, en outre, les relations

$$dx - R\,d\lambda = 0, \qquad dy - R\,d\mu = 0, \qquad dz - R\,d\nu = 0;$$

ce sont les *formules de Rodrigues*.

On voit ainsi qu'à chaque ligne de courbure d'une surface S correspond une courbe, enveloppe de la normale. Si l'on fait varier la ligne de courbure sur la surface dans la famille à laquelle elle appartient, la courbe considérée décrit une certaine surface Σ. A l'autre famille de lignes de courbure correspond, de même, une surface Σ'. L'ensemble de ces deux surfaces Σ, Σ' constitue ce que l'on appelle la *développée de la surface donnée*.

Si l'on part d'une surface définie par une équation algébrique, Σ et Σ' seront, en général, non pas deux surfaces analytiquement distinctes, mais deux nappes d'une même surface.

149. Comme application de la propriété précédente des lignes de courbure, indiquons une nouvelle manière d'écrire l'équation de ces lignes en coordonnées curvilignes générales. Soient (x, y, z) un point d'une ligne de courbure, (X, Y, Z) le point de contact de la normale au point (x, y, z) avec son enveloppe. A, B, C étant, soit comme plus haut les déterminants fonctionnels de x, y, z par rapport à u, v, soit des quantités respectivement proportionnelles à ces déterminants, soit ρ une quantité proportionnelle à la distance des deux points (x, y, z), (X, Y, Z); nous aurons

$$X = x - A\rho, \qquad Y = y - B\rho, \qquad Z = z - C\rho.$$

Les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z sont

$$\frac{dX}{A} = \frac{dY}{B} = \frac{dZ}{C},$$

d'où

$$\frac{dx - \rho\,dA}{A} = \frac{dy - \rho\,dB}{B} = \frac{dz - \rho\,dC}{C};$$

soit k la valeur commune de ces rapports. Les équations

$$dx - \rho\, dA - A k = 0,$$
$$dy + \rho\, dB - B k = 0,$$
$$dz + \rho\, dC - C k = 0,$$

qui sont trois équations linéaires et homogènes par rapport aux trois quantités non toutes nulles 1, ρ, $-k$, doivent être compatibles. Leur déterminant doit donc être nul ; c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation, à laquelle doivent satisfaire x, y, z, est *l'équation différentielle des lignes de courbure.*

450. *Théorème de Joachimsthal. — Si deux surfaces S et S′ ont en commun une ligne de courbure, elles se coupent sous un angle constant en tout point de cette ligne.*

En effet, soient C la ligne de courbure commune, M un point de C. Quand M varie sur C, la normale à S et la normale à S′ ont, l'une et l'autre, une enveloppe, et ces deux courbes enveloppes sont deux développées de C. Or (n° 411, p. 204), étant donnée une courbe C, si deux normales à cette courbe C au même point ont des enveloppes, elles font entre elles un angle constant. Cet angle étant justement ici l'angle des deux surfaces S et S′ en M, la propriété énoncée en résulte.

Réciproquement, *si deux surfaces* S *et* S′ *se coupent sous un angle constant suivant une courbe* C *et si* C *est ligne de courbure pour* S, C *est aussi ligne de courbure pour* S′.

En effet, la normale à S le long de C reste tangente à une développée de C. D'après l'étude des développées de courbes gauches, si l'on fait tourner cette normale d'un angle constant en restant dans le plan normal à C, la droite ainsi obtenue a elle aussi une enveloppe. Mais cette droite n'est autre que la normale à S′ le long de C. Donc C, qui remplit par rapport à S′ la propriété caractéristique des lignes de courbure, est une ligne de courbure pour S′.

Remarquons, en particulier, que toute courbe plane peut être considérée comme une ligne de courbure de son plan ; de même, toute courbe tracée sur une sphère est une ligne de courbure pour cette shpère. Il en résulte que, *pour qu'une ligne plane ou sphérique*

tracée sur une surface S soit ligne de courbure pour S, il faut et il suffit que le plan ou la sphère qui contient cette ligne rencontre S sous un angle constant.

451. *Systèmes triples orthogonaux.* — On appelle *système triple orthogonal* un système de trois familles de surfaces tel que par tout point de l'espace passe une surface de chaque famille et une seule, ces trois surfaces se coupant deux à deux à angle droit.

Par exemple, étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, le système des plans parallèles aux trois plans de coordonnées est un système triple orthogonal. Un autre exemple est fourni par le système des coordonnées semi-polaires : une première famille de surfaces est formée par les plans parallèles au plan des xy, une deuxième famille par les cylindres d'axe Oz et enfin la troisième famille par les plans passant par Oz. Un troisième exemple est fourni par le système des coordonnées polaires ; les trois familles de surfaces sont : des sphères de centre O, des cônes de révolution d'axe Oz et des plans passant par Oz.

452. Supposons les équations des trois familles de surfaces mises sous la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z) = \lambda, \qquad \varphi(x, y, z) = \mu, \qquad \psi(x, y, z) = \nu,$$

λ, μ, ν étant des constantes. Pour qu'au point (x, y, z) les deux premières familles soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

En exprimant de même les deux autres conditions d'orthogonalité, on a deux relations analogues relatives à φ, ψ d'une part, ψ, f d'autre part.

Imaginons maintenant que l'on ait résolu par rapport à x, y, z les équations (1). x, y, z deviennent ainsi des fonctions de λ, μ, ν, et l'on est amené à considérer le système de coordonnées curvilignes λ, μ, ν. Quand λ, μ, ν varient de toutes les manières possibles, le point (x, y, z) engendre l'espace. Quand ν, par exemple, reste fixe, le point (x, y, z) engendre une surface de la troisième famille. Si μ et ν restent fixes, λ étant seul variable, le point (x, y, z) décrit une courbe qui est l'intersection de deux surfaces de deux des familles obtenues, l'une en

faisant varier λ et μ, l'autre en faisant varier λ et ν, c'est-à-dire des deux surfaces $\nu = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$

Étant donné un point M de l'espace, les trois surfaces passant par ce point se coupent suivant trois courbes passant par M. Ces trois courbes s'obtiennent en laissant fixes deux des paramètres et faisant varier le troisième. Écrire que les trois surfaces sont orthogonales en M revient à écrire que les trois courbes $\lambda = \text{variable}$, $\mu = \text{variable}$, $\nu = \text{variable}$ sont trirectangles en M. La condition d'orthogonalité des deux premières est

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0,$$

le signe Σ s'appliquant aux lettres x, y, z.

En permutant λ, μ, ν, on a les trois conditions

$$(2) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0.$$

Considérons les deux relations qui contiennent $\frac{\partial x}{\partial \nu}$, $\frac{\partial y}{\partial \nu}$, $\frac{\partial z}{\partial \nu}$, nous pouvons en tirer des valeurs proportionnelles à ces quantités : nous aurons

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \nu}}{\dfrac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \nu}}{\dfrac{D(z, x)}{D(\lambda, \mu)}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial \nu}}{\dfrac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)}}.$$

Dérivons, d'autre part, par rapport à ν la relation

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0 ;$$

il vient

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \mu\, \partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0.$$

Désignons par P l'expression $\sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}$ et par Q et R les expressions qui s'en déduisent par permutation circulaire de λ, μ, ν. La relation précédente s'écrit

$$R + Q = 0.$$

On obtient de même

$$P + R = 0, \qquad Q + P = 0.$$

d'où résulte

$$P = Q = R = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \mu\, \partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \nu\, \partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0.$$

Théorème de Dupin. — Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent deux à deux suivant leurs lignes de courbure ou, d'une façon plus précise, l'intersection de deux surfaces appartenant à deux familles différentes est ligne de courbure pour chacune de ces deux surfaces.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer que les lignes de courbure d'une surface $\nu =$ const. sont, sur cette surface, les lignes $\lambda =$ const. et les lignes $\mu =$ const.

Considérons la surface $\nu =$ const. comme définie en fonction des deux paramètres λ, μ qui remplaceront ici les paramètres u, v de la théorie générale. L'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface est (n° 442)

$$\frac{E_1\, d\lambda + F_1\, d\mu}{E\, d\lambda + F\, d\mu} = \frac{F_1\, d\lambda + G_1\, d\mu}{F\, d\lambda + G\, d\mu}$$

ou

$$(E_1 F - E F_1)\, d\lambda^2 + (E_1 G - E G_1)\, d\lambda\, d\mu + (F_1 G - F G_1)\, d\mu^2 = 0.$$

Nous allons montrer que les quantités F et F_1 sont nulles. Pour F, la vérification est immédiate; on a, en effet, d'après les conditions d'orthogonalité,

$$F = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0.$$

Calculons F_1; nous avons

$$F_1 = A\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda\, \partial \mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial \mu}.$$

Or A, B, C, c'est-à-dire $\frac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)}$, $\cdots$ sont, d'après (3), proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial \nu}$, $\frac{\partial y}{\partial \nu}$, $\frac{\partial z}{\partial \nu}$. Pour vérifier que F_1 est nul, il suffit donc de vérifier que l'on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} = 0.$$

C'est précisément la condition $P = 0$ que nous avons obtenue.

F et F_1 étant nuls, l'équation différentielle des lignes de courbure

se réduit à

$$d\lambda\, d\mu = 0,$$

d'où les solutions

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

453. Comme nouvel exemple de systèmes triples orthogonaux, citons les systèmes de *quadriques homofocales*. On montre, en effet, que les trois surfaces homofocales à une quadrique donnée et passant par un point donné sont deux à deux orthogonales en ce point. De là résulte la propriété suivante, par application du théorème de Dupin :

Étant donnée une surface du second degré, on considère les quadriques qui lui sont homofocales; elles forment trois familles et, par un point de la première surface, passe une surface de chacune des deux autres familles. Ces deux surfaces coupent la quadrique donnée suivant ses lignes de courbure au point considéré.

454. *Remarque.* — La notion de système triple orthogonal est l'extension de la notion de trajectoire orthogonale plane. Toutefois, il existe une différence entre les deux. Étant donnée dans le plan une famille de courbes, il existe toujours une deuxième famille formée des trajectoires orthogonales des courbes de la première, tandis qu'en général, une famille de surfaces donnée ne fait pas partie d'un système triple orthogonal.

X. — Surfaces développables.

455. Considérons le plan variable

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

A, B, C, D étant des fonctions d'un paramètre t. Nous avons vu (n° 387, p. 178) qu'un tel plan enveloppe une certaine surface S qui est le lieu de sa caractéristique. Cette caractéristique est définie par l'équation (1), à laquelle on adjoint l'équation dérivée par rapport au paramètre, c'est-à-dire l'équation

$$(2) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

La caractéristique reste tangente à une certaine courbe C; les coordonnées du point de contact satisfont aux équations (1) et (2) et

à l'équation

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \tag{3}$$

Je dis que *le plan variable* (1) *est osculateur à* C *au point* (x, y, z). En effet, les coordonnées de ce point sont des fonctions de t définies par les équations (1), (2), (3), et si, dans ces équations, on remplace x, y, z par les fonctions de t ainsi définies, elles sont vérifiées identiquement. Dans ces conditions, on a, en dérivant (1) et tenant compte de (2),

$$Ax' + By' + Cz' = 0. \tag{4}$$

De même, en dérivant (2) et tenant compte de (3), on a

$$A'x' + B'y' + C'z' = 0. \tag{5}$$

Enfin, dérivons (4) et tenons compte de (5); il vient

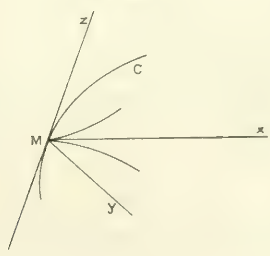
$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{6}$$

Les équations (4) et (6) montrent que A, B, C sont proportionnels aux déterminants $y'z'' - z'y''$, ... Donc le plan (1), qui passe d'ailleurs par le point (x, y, z), est le plan osculateur à la courbe C.

On a vu (n° 388, p. 180) la réciproque, à savoir que, si l'on part d'une courbe, le plan osculateur à cette courbe a pour caractéristique la tangente.

456. La courbe C est dite *l'arête de rebroussement* de la surface S. Pour justifier ce nom, montrons qu'étant donné un point M

Fig. 40.



de C, *tout plan passant par* M *et non tangent à* C *en* M *coupe la surface suivant une courbe qui, en général, a un point de rebroussement en* M.

Prenons ce point M pour origine, le plan sécant pour plan des xy, la tangente à C en M pour axe des z, le plan osculateur à C en M pour plan des zx (*fig.* 40). Enfin, prenons z comme variable indépendante; x'_z et y'_z sont nuls pour l'origine. Écrivons, de plus, que le plan osculateur, de coefficients A, B, C, est le plan $y=0$. C est nul du fait que ce plan passe par la tangente, c'est-à-dire par Oz. Il suffit donc d'annuler A. Or, on a $A=-y''$. Donc y'' doit être nul pour l'origine.

Cela étant, considérons la surface S: elle est engendrée par la tangente à C. Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la tangente au point de paramètre z, voisin de M; ses équations sont

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=Z-z.$$

Pour avoir la section Σ de S par le plan des xy, faisons, dans les équations précédentes, $Z=0$; nous en tirons les équations de Σ,

$$X=x-x'z, \qquad Y=y-y'z,$$

z étant le paramètre variable. On en déduit, en dérivant,

$$X'=-x''z, \qquad Y'=-y''z,$$
$$X''=-x''-x'''z, \qquad Y''=-y''-y'''z.$$

Pour le point M, on a $z=0$, d'où résulte (comme $y''=0$)

$$X'=Y'=Y''=0$$

et (en général)

$$X''=-x''\neq 0.$$

Cela indique que, au voisinage de M, on peut poser

$$X=(a+\varepsilon)z^2, \qquad Y=(b+\varepsilon')z^3,$$

avec $a\neq 0$, $b\neq 0$, ε et ε' tendant vers 0 avec z.

Ces équations représentent, comme l'on sait, une courbe ayant un point de rebroussement à l'origine, la tangente de rebroussement étant MX.

Ceci nous donne une idée de la forme d'une surface développable au voisinage de son arête de rebroussement. Considérons une courbe gauche, une demi-tangente à cette courbe gauche. Cette demi-tangente décrit une nappe de la développable, la demi-tangente opposée décrit une autre nappe. Ces deux nappes se raccordent le long de la courbe et sont en quelque sorte placées l'une au-dessus de l'autre.

457. *Équation aux dérivées partielles des surfaces développables.* — Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface développable.

Le plan tangent au point (x, y, z) de la surface a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

ou

$$pX + qY - Z + z - px - qy = 0.$$

Ce plan, étant le même tout le long d'une génératrice, ne doit dépendre que d'un paramètre; par conséquent, les trois fonctions p, q, $z - px - qy$ doivent être fonctions de l'une d'entre elles. En particulier p et q doivent être fonctions l'un de l'autre, c'est-à-dire sont liés par une relation. La condition pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2,$$

d'où la condition nécessaire

$$rt - s^2 = 0.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{D(z - px - qy, p)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -rx - sy & -sx - ty \\ r & s \end{vmatrix} = y(rt - s^2).$$

Ce déterminant fonctionnel est donc nul, et, par suite, il existe une relation entre $z - px - qy$ et p.

La condition $rt - s^2 = 0$ est donc nécessaire et suffisante pour que les trois fonctions p, q, $z - px - qy$ soient fonctions de l'une d'entre elles, c'est-à-dire pour que le plan tangent ne dépende que d'un paramètre. Toute surface développable satisfait donc à l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

458. Réciproquement, démontrons que, si cette condition est remplie, la surface est développable. En effet, il résulte de cette condition que p et q sont liés par une relation au moins. Si p et q étaient liés par deux relations distinctes, cela signifierait que p et q sont constants, z serait alors de la forme $z = ax + by + c$, la surface serait un plan.

Ce cas mis à part, supposons p et q liés par une relation et une seule; alors l'une au moins des deux fonctions p, q n'est pas constante; supposons que ce soit p, et soient

$$q = \varphi(p), \qquad z - px - qy = \psi(p)$$

les relations qui existent entre p et q d'une part, $z - px - qy$ et p d'autre part. La fonction z de x, y satisfait donc à l'équation

$$z - px - y\varphi(p) - \psi(p) = 0. \tag{1}$$

Dérivons par rapport à x et à y cette relation; nous obtenons, après réductions,

$$r[x + y\varphi'(p) + \psi'(p)] = 0,$$
$$s[x + y\varphi'(p) + \psi'(p)] = 0.$$

r et s ne sont pas tous deux nuls, sans quoi p serait constant, contrairement à l'hypothèse. Ces relations exigent donc que l'on ait

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0. \tag{2}$$

x, y, z satisfont aux équations (1) et (2); en éliminant p, considéré comme un paramètre, entre ces deux équations, on aura l'équation de la surface.

Cela étant, considérons le plan ayant pour équation

$$pX + \varphi(p)Y - Z + \psi(p) = 0,$$

p étant un paramètre. Pour avoir l'enveloppe de ce plan, nous devons éliminer p entre cette équation et l'équation dérivée par rapport au paramètre, c'est-à-dire l'équation

$$X + \varphi'(p)Y + \psi'(p) = 0.$$

Ces deux équations sont identiques aux équations (1) et (2); on trouvera donc comme enveloppe de ce plan la même surface que précédemment. En résumé, *il existe un certain plan dépendant d'un paramètre dont la surface donnée est l'enveloppe.* C'est donc bien une surface développable.

459. L'équation aux dérivées partielles

$$rt - s^2 = 0$$

caractérise ainsi les surfaces développables. Elle exprime le fait géométrique suivant : en tout point de la surface, l'indicatrice est parabolique.

En coordonnées curvilignes générales, on obtient l'équation des surfaces développables en partant de cette propriété. Avec les notations déjà employées, cette équation est

$$E_1 G_1 - F_1^2 = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre entre les variables u, v.

460. En chaque point d'une surface développable, il n'y a qu'une ligne asymptotique : c'est la génératrice de la surface.

Cherchons les lignes de courbure. Les génératrices constituent une première famille de lignes de courbure, car en chaque point la génératrice constitue un axe de l'indicatrice. L'autre famille se compose des trajectoires orthogonales des génératrices sur la surface. Or, une trajectoire orthogonale des génératrices est une courbe telle que certaines de ses normales, à savoir : les génératrices elles-mêmes, sont tangentes à l'arête de rebroussement. C'est donc une développante de l'arête de rebroussement (n° 443, p. 205). On sait que, pour obtenir une telle courbe, on porte sur la tangente à l'arête de rebroussement une longueur $l - s$, l étant une constante, s étant l'arc de l'arête de rebroussement compté à partir d'une certaine origine.

XI. — Surfaces réglées.

461. Une surface réglée est une surface engendrée par une droite variant en fonction d'un paramètre. Soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de la droite, a, b, α, β étant quatre fonctions données d'un paramètre u. Le point de coordonnées x, y, z engendre la surface réglée qui se trouve définie en fonction des deux paramètres z et u.

On sait que, pour que la droite reste tangente à une courbe, il faut qu'il y ait compatibilité entre ses équations et les équations dérivées par rapport au paramètre u. Soient a', b', α', β' les dérivées de a, b, α, β par rapport à u. Les équations dérivées par rapport au paramètre sont ici

$$a'z + \alpha' = 0, \qquad b'z + \beta' = 0.$$

Pour que les quatre équations soient compatibles, il faut et il suffit

que les deux dernières donnent la même valeur pour z, c'est-à-dire que l'on ait

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

C'est *la condition pour que la surface soit développable.*

462. Reprenons le cas général et cherchons l'équation du plan tangent en un point (x, y, z). Ce plan contient la génératrice qui passe par ce point ; son équation est donc de la forme

$$X - aZ - \alpha - \lambda(Y - bZ - \beta) = 0.$$

Considérons sur la surface un déplacement du point (x, y, z) correspondant à une variation de u, z étant constant. On a, pour ce déplacement,

$$dx = z\,da + d\alpha, \qquad dy = z\,db + d\beta, \qquad dz = 0.$$

Ces valeurs de dx, dy, dz définissent la direction de la tangente à la courbe $u =$ variable qui passe par le point (x, y, z). Écrivons que le plan tangent est parallèle à cette direction, cela nous donne la condition

$$za' + \alpha' + \lambda(zb' + \beta') = 0.$$

Cette relation détermine λ ; l'équation du plan tangent au point de cote z est donc

$$(X - aZ - \alpha)(b'z + \beta') - (Y - bZ - \beta)(a'z + \alpha') = 0.$$

On reconnaît que λ est fixe, c'est-à-dire que le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, si le rapport $\frac{a'z + \alpha'}{b'z + \beta'}$ est indépendant de z. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

c'est-à-dire

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

Comme nous l'avons déjà vu, la surface est alors une surface développable.

463. Ce cas mis à part, le plan tangent varie avec z le long de chaque génératrice. Pour étudier sa variation, prenons pour axe des Z la génératrice considérée ; l'équation du plan tangent devient

$$X(b'z + \beta') - Y(a'z + \alpha') = 0.$$

Soit ψ l'angle de ce plan avec le plan des ZX ; on a, en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b'z + \beta}{a'z + \alpha};$$

$\operatorname{tang}\psi$ et z sont liés par une relation homographique. Cela montre que, quand z varie, le plan tangent prend toutes les positions possibles autour de OZ, c'est-à-dire de la génératrice. Quand z croît indéfiniment, le plan tangent a une position limite pour laquelle on a

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b'}{a'}.$$

Faisons tourner les axes autour de OZ de façon à prendre cette position pour plan ZOY. On aura, avec ces nouveaux axes, $a' = 0$; $\operatorname{tang}\psi$ sera lié à z par une relation de la forme

$$\operatorname{tang}\psi = k(z - h).$$

Déplaçons enfin les axes parallèlement à eux-mêmes, de façon que ψ soit nul en même temps que z; nous aurons

$$\operatorname{tang}\psi = kz,$$

k est dit le *paramètre de distribution*. L'origine dans ce système de coordonnées s'appelle le *point central* : c'est le point pour lequel le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan tangent à la surface au point à l'infini sur la génératrice.

464. Considérons deux positions voisines D et D_1 de la génératrice de la surface, correspondant respectivement aux valeurs u, $u + \Delta u$ du paramètre. Les coefficients a, b, α, β ont pour la première les valeurs a, b, α, β et pour la seconde les valeurs $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$. Nous supposons a, b, α, β développables par la série de Taylor en fonction de u.

Nous allons évaluer l'ordre infinitésimal, lorsque D et D_1 deviennent infiniment voisines : 1° de leur angle ω; 2° de leur plus courte distance δ. Nous avons

$$\cos\omega = \frac{a(a + \Delta a) + b(b + \Delta b) + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}.$$

On en déduit, en utilisant l'identité de Lagrange,

$$\sin^2\omega = 1 - \cos^2\omega = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}{(a^2 + b^2 + 1)[(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1]}.$$

On reconnaît que $\sin\omega$ et, par suite, ω est un infiniment petit du même ordre que Δu.

Il y a lieu de mettre à part le cas où ω est nul, c'est-à-dire où l'on a $\Delta a = \Delta b = 0$. La droite décrit alors un *cylindre*.

Étudions maintenant la plus courte distance δ entre D et D_1. Pour cela, nous prenons la distance d'un point de D_1 au plan parallèle à D_1 mené par D; son équation est de la forme

$$X - aZ - \alpha + \lambda(Y - bZ - \beta) = 0;$$

λ doit être tel que ce plan soit parallèle à la direction $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, 1, c'est-à-dire qu'on ait

$$a + \Delta a + \lambda(b + \Delta b) - (a + \lambda b) = 0;$$

cette équation détermine λ :

$$\lambda = -\frac{\Delta a}{\Delta b}.$$

L'équation du plan considéré est donc

$$\Delta b(X - aZ - \alpha) - \Delta a(Y - bZ - \beta) = 0.$$

Considérons le point de la droite D_1 qui a pour cote o. On a, pour ce point,

$$X = \alpha + \Delta\alpha, \qquad Y = \beta + \Delta\beta, \qquad Z = 0.$$

La distance de ce point au plan précédent est

$$\delta = \frac{\Delta b\,\Delta\alpha - \Delta a\,\Delta\beta}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}.$$

Le dénominateur est, comme nous l'avons vu, du premier ordre par rapport à Δu. Étudions le numérateur; Δa, par exemple, est de la forme

$$\Delta a = a'\,\Delta u + \frac{a''}{2}\Delta u^2 + \frac{a'''}{6}\Delta u^3 + \ldots;$$

Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ ont des développements analogues, de sorte que le numérateur contient comme terme de plus bas degré en Δu un terme en Δu^2 qui a pour coefficient $b'\alpha' - a'\beta'$. Cette quantité étant différente de o, sauf pour une surface développable, nous voyons que, pour toute surface non développable, δ est du même ordre infinitésimal que Δu, et, par suite, que ω.

Cherchons quel est, pour une surface développable, l'ordre du numérateur de δ. Remplaçons comme précédemment Δa, Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$

par leurs développements en formule de Taylor arrêtés, suivant le cas, au troisième ou au quatrième terme. Le coefficient de Δu^2 étant nul, cherchons le coefficient de Δu^3 ; c'est

$$\frac{1}{2}(a'\beta'' + a''\beta' - b'\alpha'' - b''\alpha').$$

Cette expression n'est autre que la dérivée de $a'\beta' - b'\alpha'$; elle est donc nulle. Le coefficient de Δu^4 est

$$\frac{1}{6}(a'\beta''' + a'''\beta' - b'\alpha''' - b'''\alpha') + \frac{1}{4}(a''\beta'' - b''\alpha'').$$

Je dis qu'il est, en général, différent de o. Cherchons à quelle condition il peut être nul. Dérivons le coefficient de Δu^3 ; nous obtenons les deux expressions entre parenthèses dans l'expression précédente, mais avec des coefficients numériques différents. Le coefficient de Δu^4 ne peut donc être constamment nul que si ces deux expressions sont constamment nulles séparément. En particulier, il faut qu'on ait

$$a''\beta'' - b''\alpha'' = 0.$$

En résumé, en mettant à part le cas de $a''\beta'' - b''\alpha'' = 0$, le numérateur de δ contient comme terme de plus bas degré un terme en Δu^4. Donc δ est du troisième ordre en Δu.

Cherchons à quelle condition on aura $a''\beta'' - b''\alpha'' = 0$. De la condition $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ nous déduisons

$$\alpha' = \lambda a', \qquad \beta' = \lambda b',$$

d'où

$$\alpha'' = \lambda a'' + \lambda' a', \qquad \beta'' = \lambda b'' + \lambda' b'.$$

$$a''\beta'' - b''\alpha'' = a''(\lambda b'' + \lambda' b') - b''(\lambda a'' + \lambda' a') = \lambda'(a''b' - b''a').$$

Nous sommes ramenés à étudier les solutions de l'équation

$$\lambda'(a''b' - b''a') = 0.$$

1° Nous avons la solution

$$\lambda' = 0,$$

d'où

$$\lambda = \text{const.}$$

et, par suite,

$$\alpha = \lambda a + \mu, \qquad \beta = \lambda b + \nu,$$

μ et ν étant des constantes. Les équations de la droite D deviennent

$$X = a(Z + \lambda) + \mu, \qquad Y = b(Z + \lambda) + \nu.$$

On voit que cette droite passe par le point fixe

$$x = \mu, \qquad y = \nu, \qquad z = -\lambda.$$

La surface est un *cône*, la plus courte distance de deux droites quelconques est nulle.

2° Une seconde solution de l'équation est

$$a''b' - b''a' = 0,$$

ce qui exprime que le rapport $\frac{b'}{a'}$ est constant. Supposons a' et b' non constamment nuls, et posons

$$b' = ka';$$

nous en déduisons

$$b = ka + c,$$

c étant une constante. De plus, la relation $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ s'écrit

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{b'}{a'} = k,$$

d'où

$$\beta = k\alpha + \mu.$$

Les équations de la droite prennent la forme suivante :

$$X = aZ + \alpha, \qquad Y = (ka + c)Z + k\alpha + \mu.$$

On voit que les coordonnées de tout point de cette droite satisfont à l'équation

$$Y = kX + cZ + \mu.$$

La droite reste dans un *plan*, et la plus courte distance de deux génératrices quelconques est nulle.

Nous avons laissé de côté le cas où a' et b' sont constamment nuls ; a et b sont alors constants, la droite engendre un *cylindre*, ω étant constamment nul, il n'y a pas lieu de comparer δ et ω.

En résumé, il résulte de cette étude que, *dans une surface réglée non développable, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et l'angle de ces deux droites sont deux infiniment petits de même ordre. Dans une surface développable qui n'est ni un cône, ni un cylindre, ni un plan, la plus courte distance est du troisième ordre relativement à l'angle.* Enfin, *dans un cône et un plan la plus courte distance est nulle, dans un cylindre l'angle est nul.*

XII. — Déformation et représentation des surfaces.

465. Étant donnée une surface définie par les formules

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

on a obtenu (n° 423) la relation

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Remarquons que les fonctions E, F, G ne changent pas si l'on effectue une transformation de coordonnées rectangulaires en gardant les mêmes paramètres u, v, car on a toujours

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Supposons maintenant qu'on remplace u, v par deux nouveaux paramètres u_1, v_1, le changement qui permet de passer de u, v à u_1, v_1 étant réversible. Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v_1} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1},$$

et, en appelant A_1, B_1, C_1, E_1, ... les fonctions analogues à A, B, C, E, ... avec les nouveaux paramètres, nous en déduisons

$$E_1 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = E\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2.$$

E_1 est donc fonction linéaire de E, F, G et dépend, en outre, des dérivées des anciens paramètres par rapport aux nouveaux.

Formons de même F_1, nous aurons

$$F_1 = E\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) + G\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}.$$

Enfin on sait que l'on a

$$A_1 = A\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}, \qquad B_1 = B\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}, \qquad C_1 = C\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)},$$

d'où

$$H_1 = H\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}.$$

466. Cela étant, considérons deux surfaces différentes définies de la façon suivante. Pour la première, s, on a

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

et pour la seconde, S, on a, u et v étant les mêmes paramètres,

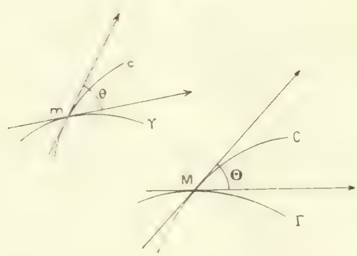
$$X = F(u, v), \qquad Y = \Phi(u, v), \qquad Z = \Psi(u, v).$$

Soient e, f, g, h les fonctions relatives à s, E, F, G, H les fonctions analogues relatives à S.

A un système de valeurs de u, v correspond un point m sur la première surface et un point M sur la seconde. Ainsi se trouve établie une correspondance point par point entre les deux surfaces ; c'est cette correspondance que nous allons étudier.

Considérons sur s deux courbes c et γ se rencontrant en un point m et sur S les deux courbes correspondantes C et Γ qui se rencontrent au point M, correspondant à m (*fig.* 41). Cherchons à quelle condi-

Fig. 41.



tion l'angle des deux courbes tracées sur s est égal à l'angle des deux courbes tracées sur S, ou, plus brièvement, cherchons à quelle condition l'angle de deux courbes se conserve dans la correspondance.

Soient u et v les paramètres des points m et M.

Désignons par du, dv les accroissements correspondant à un déplacement à partir de m sur la courbe c, et, par suite, à un déplacement à partir de M sur C, par dx, dy, dz les différentielles de x, y, z correspondantes; soient δu, δv, δx, δy, δz les quantités analogues relatives à γ et Γ.

Nous aurons, en appelant θ et Θ les angles des tangentes en m et M,

$$\cos\theta = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds\,\delta s}$$

ou, en remplaçant dx par $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, ...,

$$\cos\theta = \frac{e\,du\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g\,dv\,\delta v}{\sqrt{(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)(e\,\delta u^2 + 2f\,\delta u\,\delta v + g\,\delta v^2)}},$$

et, de même,

$$\cos\Theta = \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{\sqrt{(\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2)(\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2)}}.$$

Mettons en évidence les rapports

$$\frac{dv}{du} = k, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = k'.$$

L'égalité des angles θ et Θ exige que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{[e + f(k + k') + gkk']^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)} = \frac{[\mathrm{E} + \mathrm{F}(k + k') + \mathrm{G}kk']^2}{(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}k + \mathrm{G}k^2)(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}k' + \mathrm{G}k'^2)},$$

et, pour qu'il en soit ainsi quelles que soient les courbes c et γ, il faut que cette relation ait lieu quels que soient k et k'. On aperçoit la solution évidente :

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{E}}{e} = \frac{\mathrm{F}}{f} = \frac{\mathrm{G}}{g}.$$

En effet, si l'on a ces relations, les deux membres de (1) sont identiques. Je dis que c'est la seule solution. Imaginons que l'on mette l'équation (1) sous forme entière. L'expression $e + 2fk + gk^2$, qui divise le second membre en tant que polynome en k et k', doit diviser le premier, qui est

$$[e + f(k + k') + gkk']^2[\mathrm{E} + 2\mathrm{F}k + \mathrm{G}k^2][\mathrm{E} + 2\mathrm{F}k' + \mathrm{G}k'^2].$$

Remarquons que l'expression $e + f(k + k') + gkk'$, en tant que polynome en k et k', n'est pas décomposable. En effet, si elle l'était, elle se décomposerait en un produit de la forme

$$\lambda(e + fk)(e + fk'),$$

et, en identifiant ces deux expressions, on obtient

$$\frac{\lambda e^2}{e} = \frac{\lambda ef}{f} = \frac{\lambda f^2}{g},$$

d'où

$$eg - f^2 = 0,$$

ce qui est impossible. L'expression $e + f(k + k') + gkk'$ n'étant pas

décomposable, il faut que les deux facteurs qui entrent dans $e + 2fk + gk^2$ divisent les deux facteurs de $E + 2Fk + Gk^2$, c'est-à-dire que ces deux trinomes soient proportionnels. Cela exige que l'on ait les conditions (2).

Supposons ces conditions remplies pour les surfaces s et S, et soit λ la valeur du rapport $\frac{E}{e}$; nous aurons

$$dS^2 = \lambda\, ds^2.$$

Dans la correspondance entre les deux surfaces, l'angle de deux courbes est alors conservé. On exprime ce résultat en disant qu'*il y a similitude entre les éléments infiniment petits des deux surfaces*. Cette correspondance est dite une *représentation conforme*.

Considérons, en particulier, le cas de $\lambda = 1$; on a

$$E = e, \qquad F = f, \qquad G = g.$$

Outre les propriétés précédentes, s et S possèdent la propriété suivante : *deux arcs de courbes correspondants tracés sur ces deux surfaces ont même longueur*. Deux surfaces pour lesquelles il est possible de réaliser une correspondance de cette nature sont dites *applicables l'une sur l'autre*.

467. Nous allons montrer par un exemple que deux surfaces peuvent être applicables tout en étant complètement différentes de forme. Considérons une surface de révolution d'axe Oz, les coordonnées d'un de ses points étant

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = f(r).$$

On a pour cette surface

$$ds^2 = dr^2[1 + f'^2(r)] + r^2\,d\varphi^2.$$

Considérons, d'autre part, un hélicoïde à plan directeur (*cf.* n° 447, p. 238), défini par les équations

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av.$$

L'élément linéaire de cette surface est

$$ds_1^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2.$$

Nous allons chercher à déterminer une surface de révolution applicable sur l'hélicoïde à plan directeur. Pour cela, nous allons chercher, par un changement convenable de paramètres, à identifier les deux ds^2 de ces surfaces.

Remarquons que l'expression $dr^2[1+f'^2(r)]$, qui ne contient que r, peut être mise sous la forme du carré d'une différentielle. Cherchons des fonctions u, v de r, φ telles que

$$dr\sqrt{1+f'^2(r)} = du, \qquad r^2\,d\varphi^2 = (a^2+u^2)\,dv^2.$$

Prenons pour cela

$$\varphi = v, \qquad r^2 = a^2+u^2,$$

d'où

$$r\,dr = u\,du.$$

La première relation devient

$$\sqrt{1+f'^2(r)} = \frac{du}{dr} = \frac{r}{u}$$

ou

$$1+f'^2(r) = \frac{r^2}{r^2-a^2},$$

$$f'(r) = \frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$f(r) = a\,\mathrm{L}(r+\sqrt{r^2-a^2}) + \text{const.}$$

L'équation de la méridienne de la surface de révolution cherchée est

$$z = a\,\mathrm{L}(r+\sqrt{r^2-a^2}) + \text{const.}$$

ou, en choisissant convenablement la constante,

$$ae^{\frac{z}{a}} = r+\sqrt{r^2-a^2}.$$

On en déduit

$$ae^{-\frac{z}{a}} = r-\sqrt{r^2-a^2},$$

d'où, par addition,

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Cette méridienne est une chaînette (n° 415, p. 208) ayant pour axe de symétrie l'axe des r ou des x. La surface de révolution engendrée par cette chaînette tournant autour de Oz s'appelle l'*alysséide*. *Elle est applicable sur l'hélicoïde à plan directeur représenté par les équations*

$$x = \sqrt{r^2-a^2}\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{r^2-a^2}\sin\varphi, \qquad z = a\varphi.$$

Pour la surface de révolution, les courbes φ = const. sont les méridiennes, pour l'hélicoïde, ce sont les génératrices; les chaînettes correspondent ainsi aux droites sur l'hélicoïde. De même, les parallèles sur l'alysséide correspondent aux hélices sur la seconde surface.

168. Étudions les *surfaces applicables sur un plan*. Soit α, β un système de coordonnées rectangulaires dans le plan. Considérons une surface applicable sur ce plan et prenons α, β comme paramètres sur cette surface. Nous devons avoir, dans ces conditions,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Exprimons dx, dy et dz en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$, et identifions les deux formes quadratiques en $d\alpha$, $d\beta$ ainsi obtenues. Nous aurons

$$(1) \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = 1, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 = 1, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0.$$

Dérivons les deux premières relations par rapport à α et β; nous obtenons

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = 0.$$

Dérivons maintenant la troisième des relations (1) en tenant compte de celles que nous venons d'obtenir; nous aurons

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = 0.$$

Parmi les six relations obtenues, celles qui contiennent $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$ montrent que ces trois quantités sont proportionnelles aux déterminants A, B, C. On reconnaît qu'il en est de même, d'une part pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}$, d'autre part pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$, de sorte que, si l'on forme le tableau des dérivées secondes de x, y, z par rapport à α, β, les trois lignes du tableau seront formées d'éléments proportionnels. Il en résulte que tout déterminant du second ordre issu de ce tableau est nul.

Cela étant, considérons les fonctions $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$; le déterminant fonctionnel de deux quelconques d'entre elles par rapport à α, β est nul, car c'est un déterminant du second ordre issu du tableau précédent. Donc ces trois fonctions sont fonctions de l'une d'elles. De

même, $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \frac{\partial z}{\partial \beta}$ sont fonctions de l'une d'elles. Or, on a entre ces six dérivées une relation qui est

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0.$$

Il en résulte que ces six dérivées sont fonctions d'une seule d'entre elles.

Imaginons maintenant qu'on revienne, pour définir la surface, aux variables indépendantes x, y. Nous obtiendrons les relations entre les nouvelles dérivées et les anciennes en partant de

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

En résolvant ces équations, nous aurons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et, comme les dérivées de x, y, z par rapport à α, β sont fonctions de l'une d'entre elles, il y aura entre $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ une relation; autrement dit, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ seront fonctions l'une de l'autre. Nous avons constaté (nº 458, p. 249) qu'il faut, pour qu'il en soit ainsi, que la surface soit *développable*.

Ainsi, *les surfaces applicables sur un plan sont des surfaces développables*.

469. Réciproquement, étant donnée une surface développable, nous allons montrer qu'elle est applicable sur un plan; pour cela, nous allons chercher, par un choix convenable des paramètres u, v, à mettre le ds^2 de cette surface sous la forme $du^2 + dv^2$.

Considérons la développable comme la surface engendrée par la tangente à son arête de rebroussement. Soient $M(x, y, z)$ le point de contact de cette tangente, α, β, γ ses cosinus directeurs. Un point quelconque M_1 de cette tangente, situé à la distance l du point M, a pour coordonnées

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma.$$

Quand le point M et la longueur l varient, le point M_1 décrit la surface développable. Soient s_1 l'arc d'une courbe quelconque décrite par M_1, s l'arc de l'arête de rebroussement; nous avons

$$ds_1^2 = \sum dx_1^2 = \sum (dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl)^2,$$

$$ds_1^2 = \sum [\alpha(ds + dl) + l\,d\alpha]^2 = (ds + dl)^2 + l^2 \sum d\alpha^2.$$

R étant le rayon de courbure de l'arête de rebroussement en M, remplaçons $d\alpha$ par $\frac{\alpha_1}{R}ds$; il vient

$$ds_1^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2}{R^2}ds^2.$$

Nous allons chercher à mettre ds^2 sous la forme

$$dX^2 + dY^2,$$

c'est-à-dire

$$(dX + i\,dY)(dX - i\,dY).$$

Or, ds_1^2 peut être mis sous la forme

$$ds_1^2 = \left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right)\left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right).$$

Cherchons une fonction μ telle que le produit

$$\mu\left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right) = \mu\left(1 + \frac{il}{R}\right)ds + \mu\,dl$$

soit une différentielle exacte; autrement dit, cherchons un facteur intégrant pour l'expression

$$ds + dl + il\frac{ds}{R}.$$

On est conduit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\mu\left(1 + \frac{il}{R}\right)\right] - \frac{\partial\mu}{\partial s} = 0$$

ou

$$\left(1 + \frac{il}{R}\right)\frac{\partial\mu}{\partial l} + \mu\frac{i}{R} - \frac{\partial\mu}{\partial s} = 0.$$

On a une solution en prenant μ indépendant de l et satisfaisant à

$$\frac{d\mu}{ds} = \mu\frac{i}{R},$$

d'où

$$\mu = e^{i\int\frac{ds}{R}}.$$

D'ailleurs, les deux facteurs $ds + dl + il\frac{ds}{R}$, $ds + dl - il\frac{ds}{R}$ étant imaginaires conjugués, le second a pour facteur intégrant $e^{-i\int\frac{ds}{R}}$, et, comme le produit de ces deux facteurs intégrants est égal à 1, nous pouvons écrire

$$ds_1^2 = \left[e^{i\int\frac{ds}{R}}\left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right)\right]\left[e^{-i\int\frac{ds}{R}}\left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right)\right].$$

Chacun de ces facteurs doit être une différentielle exacte. Pour mettre ce fait en évidence, posons

$$\sigma = \int \frac{ds}{R}.$$

Le premier facteur de ds_1^2 s'écrit

$$e^{i\sigma}\,dl + le^{i\sigma}i\,d\sigma + e^{i\sigma}\,ds;$$

c'est la différentielle de

$$le^{i\sigma} + \int e^{i\sigma}\,ds.$$

Dans cette expression, séparons les parties réelles et les coefficients de i, et posons

$$X = l\cos\sigma + \int \cos\sigma\,ds, \qquad Y = l\sin\sigma + \int \sin\sigma\,ds.$$

Nous aurons

$$ds_1^2 = (dX + i\,dY)(dX - i\,dY) = dX^2 + dY^2.$$

Il y a donc application entre la surface donnée et le plan (X, Y), ce qui démontre la proposition.

Examinons la correspondance qui se trouve ainsi établie entre la surface et le plan. Pour $l = 0$, le point M_1 décrit l'arête de rebroussement de la développable ; le point qui lui correspond dans le plan décrit la courbe ayant pour équations

$$X = \int \cos\sigma\,ds, \qquad Y = \int \sin\sigma\,ds.$$

A une tangente à l'arête de rebroussement, obtenue pour $s =$ const., correspond une droite, car X, Y sont fonctions linéaires du paramètre l, de sorte que, dans l'application, aux droites de la surface correspondent des droites du plan. Ces droites sont d'ailleurs tangentes à la transformée de l'arête de rebroussement.

470. *Courbure totale*. — Nous avons appelé *courbure totale* en chaque point d'une surface le produit $\frac{1}{R_1 R_2}$, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux en ce point. Nous avons vu que ces rayons de courbure sont les racines de l'équation du second degré suivante :

$$(EH - E_1 R)(GH - G_1 R) - (FH - F_1 R)^2 = 0.$$

de sorte qu'on a

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Nous allons montrer que la courbure totale en un point d'une surface ne dépend que des fonctions E, F, G et de leurs dérivées. Il suffit, d'après la forme de $\frac{1}{R_1 R_2}$, de montrer que la fonction $E_1 G_1 - F_1^2$ s'exprime en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Rappelons qu'on a

$$E_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \cdots \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \cdots \end{vmatrix}, \qquad F_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \cdots \end{vmatrix}.$$

En effectuant le produit des deux premiers déterminants lignes par lignes, nous avons

$$E_1 G_1 = \begin{vmatrix} E & F & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ F & G & \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{vmatrix};$$

nous avons de même

$$F_1^2 = \begin{vmatrix} E & F & \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \\ F & G & \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \right)^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ces deux déterminants, tous les éléments, sauf le dernier dans chacun d'eux, s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. On a, en effet, en dérivant E et G,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Dérivons F par rapport à u et v, et tenons compte des relations

précédentes. On a

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Il résulte de là que, dans le développement de $E_1G_1 - F_1^2$, tous les termes s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées, sauf peut-être le terme

$$(EG - F^2)\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right)^2\right].$$

Or, en dérivant par rapport à u la somme

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

par rapport à v la somme

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v},$$

et retranchant la seconde dérivée de la première, il reste

$$\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right)^2\right],$$

qui s'exprime donc aussi en fonction des dérivées de E, F, G.

Par suite, *la courbure totale en un point ne dépend que des fonctions* E, F, G *et de leurs dérivées.*

Nous avons vu qu'étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, il existe une certaine représentation paramétrique telle qu'en deux points correspondants, E, F, G sont les mêmes pour les deux surfaces. Il en résulte qu'en ces deux points les surfaces ont même courbure totale. On exprime ce fait en disant que *la courbure totale se conserve dans la déformation.*

Constatons, en particulier, que cela a lieu pour les surfaces développables, qui sont des surfaces applicables sur un plan. La courbure totale en chaque point de ces deux surfaces est nulle.

471. Signalons ce fait, qu'il existe des surfaces dont la courbure totale est constante. La sphère, par exemple, est une surface à courbure totale constante et positive.

Citons un exemple de surface à courbure totale constante et négative : c'est la *pseudo-sphère* ou surface de révolution engendrée par

la tractrice en tournant autour de son asymptote. En nous reportant à la figure 36 (page 208), nous voyons que GM, rayon de courbure de la tractrice en G, est l'un des rayons de courbure principaux en G; l'autre est GT. Les sections principales en G sont, en effet, la section méridienne et la section qui lui est perpendiculaire. Ces deux rayons de courbure étant ici de sens contraires, la courbure totale est négative; de plus elle est constante, car on a (p. 210)

$$GM.GT = GP^2 = \text{const.}$$

472. *Représentation d'une surface sur un plan.* — Supposons qu'on se propose de représenter une surface sur un plan, c'est-à-dire d'établir une correspondance point par point entre la surface et le plan, cette correspondance devant réaliser certaines conditions géométriques qu'on indique.

Cherchons, par exemple, une représentation qui conserve les angles [représentation *conforme* (*cf.* n° 466)].

Soient u, v les paramètres dont dépend la surface, X, Y les coordonnées rectangulaires dans le plan, ds^2 le carré de l'élément linéaire de la surface, $dX^2 + dY^2$ celui du plan. Nous avons

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et nous devons mettre cette expression sous la forme $\lambda(dX^2 + dY^2)$. Pour cela, mettons d'abord la forme quadratique en u, v qui représente ds^2 sous la forme d'un produit,

$$(a\,du + b\,dv)(a'\,du + b'\,dv),$$

a' et b' étant imaginaires conjugués de a et b. On cherchera un facteur intégrant pour l'expression $a\,du + b\,dv$, c'est-à-dire un facteur $m + ni$ (m et n étant réels) tel que l'expression

$$(m + ni)(a\,du + b\,dv)$$

soit différentielle exacte; $m - ni$ sera facteur intégrant pour l'expression $a'\,du + b'\,dv$.

Si nous posons

$$(m + ni)(a\,du + b\,dv) = dX + i\,dY,$$

nous aurons

$$(m - ni)(a'\,du + b'\,dv) = dX - i\,dY,$$

d'où

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{m^2 + n^2}.$$

Le problème sera résolu, le facteur λ ayant pour valeur $\frac{1}{m^2+n^2}$.

473. Cherchons, en particulier, des représentations d'une sphère sur un plan, dans lesquelles les angles soient conservés. Prenons pour coordonnées d'un point de la sphère

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta.$$

On a, dans ces conditions,

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Pour avoir une solution du problème, écrivons

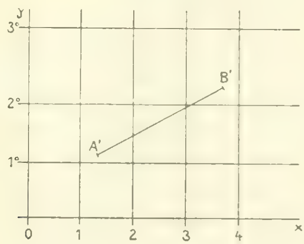
$$ds^2 = R^2\sin^2\theta\left(d\varphi^2 + \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}\right).$$

Comme $d\varphi$ et $\frac{d\theta}{\sin\theta}$ sont deux différentielles exactes, il suffit de poser

$$X = \varphi, \qquad Y = -\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = -L\left|\tang\frac{\theta}{2}\right|$$

pour avoir une représentation conforme de la sphère sur le plan (X, Y).

Fig. 42.



Supposons qu'il s'agisse de représenter une portion du globe terrestre, c'est-à-dire d'en tracer une carte. Prenons pour axe OZ l'axe polaire. Les courbes φ = const. sont sur la Terre les différentes méridiennes; les courbes θ = const., les parallèles. Il leur correspond dans le plan les droites X = const. pour les premières, les droites Y = const. pour les secondes (*fig.* 42). A différents méridiens faisant entre eux des angles égaux correspondent des droites également dis-

tantes les unes des autres, mais à différents parallèles obtenus en donnant à θ les valeurs θ, $\theta + 1^\circ$, $\theta + 2^\circ$, ... correspondent des droites s'écartant de plus en plus l'une de l'autre. Si l'on va sur une méridienne de l'équateur au pôle, θ varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ varie de 1 à 0, Y varie donc de 0 à $+\infty$. A l'équateur correspond donc l'axe des X; à des points voisins du pôle correspondent des points très éloignés dans la direction de OY. On désigne cette projection sous le nom de *projection de Mercator*.

On appelle *loxodromie* une courbe tracée sur la surface du globe terrestre et qui coupe tous les méridiens sous un angle constant. Je dis que, dans la projection de Mercator, elle est représentée par une droite.

Soient, en effet, deux points A, B du globe terrestre ayant pour images A' et B'. Joignons A'B'. Ce segment A'B', qui rencontre toutes les droites $X = \text{const.}$ sous le même angle, est l'image d'une courbe tracée sur la sphère. Comme l'angle de deux courbes se conserve dans la projection, cette courbe AB rencontre tous les méridiens sous un angle constant. C'est donc bien une loxodromie.

474. Indiquons une autre représentation plane de la sphère, conservant également les angles. Nous pouvons écrire

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2\,d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}} + R^2\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2\right).$$

Posons

$$\rho = R\operatorname{tang}\frac{\theta}{2};$$

on en déduit

$$d\rho = \frac{R\,d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

de sorte qu'on a

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}(d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2).$$

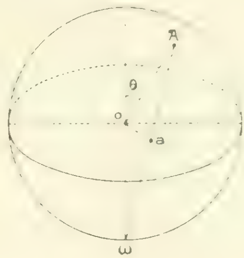
L'expression $d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2$ représente le carré de l'élément linéaire d'un arc dans un plan rapporté à un système de coordonnées polaires φ et ρ. Il suffit d'établir entre θ et φ d'une part, ρ et φ d'autre part, la relation

$$\rho = R\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

pour avoir une représentation plane de la sphère dans laquelle les angles sont conservés.

C'est une *projection stéréographique* obtenue de la façon suivante : Soient ω l'une des extrémités de l'axe polaire (*fig.* 43),

Fig. 43.



A un point de l'hémisphère qui ne contient pas ω. On prend pour image de A l'intersection a de $A\omega$ avec le plan de l'équateur. En effet, prenons un méridien déterminé, c'est-à-dire attribuons à φ une certaine valeur; on a

$$O\omega A = \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$Oa = \rho = R \tan\frac{\theta}{2}.$$

XIII. — Lignes géodésiques.

475. On appelle *ligne géodésique* d'une surface une courbe tracée sur cette surface et telle que son plan osculateur en chaque point est normal à la surface. Supposons la surface définie en fonction de deux paramètres u, v. Étant donnée une ligne décrite par le point (x, y, z), le plan osculateur en un point de cette ligne est défini par les deux directions de coefficients respectifs dx, dy, dz et d^2x, d^2y, d^2z. Pour que ce plan contienne la normale à la surface, il faut et il suffit que les trois directions (dx, dy, dz), (d^2x, d^2y, d^2z), (A, B, C) soient parallèles à un même plan, d'où la condition

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi, en exprimant tous les éléments de ce déterminant en

fonction de u, v, l'*équation différentielle des lignes géodésiques*. Cherchons quelle est la forme de cette équation. Remplaçons dx, d^2x, ... par leurs valeurs :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v.$$

On voit que le premier membre de l'équation (1) se présente sous la forme d'un polynome en du, dv, d^2u, d^2v, du troisième degré par rapport à du, dv. L'ensemble des termes contenant seulement les différentielles premières est de la forme

$$L\,du^3 + M\,du^2\,dv + N\,du\,dv^2 + P\,dv^3.$$

Il peut y avoir, en outre, des termes en $du\,d^2u$, $dv\,d^2v$, $du\,d^2v$, $dv\,d^2u$. Les deux premiers ont leurs coefficients nuls, car ce sont des déterminants ayant deux lignes identiques. Le terme en $du\,d^2v$ a pour coefficient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ A & B & C \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $A^2 + B^2 + C^2$ ou H^2. De même, le coefficient de $dv\,d^2u$ est $-H^2$, de sorte que l'équation différentielle des lignes géodésiques peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad L\,du^3 + M\,du^2\,dv + N\,du\,dv^2 + P\,dv^3 + H^2(du\,d^2v - dv\,d^2u) = 0.$$

Si l'on prend comme variable indépendante u, v étant fonction de u, on a l'équation

$$(3) \qquad v'' = \alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \delta,$$

α, β, γ, δ étant certaines fonctions de u, v; on déduit de là qu'*une ligne géodésique est déterminée par un point et la tangente en ce point*. En effet, donner un point, c'est donner un système de valeurs u_0, v_0; donner la tangente revient à donner la valeur de v'_0, et, d'après le théorème d'existence des solutions d'équations différentielles, il y a une fonction déterminée v de u qui satisfait à l'équation (3) et qui, pour $u = u_0$, prend la valeur v_0 en même temps que sa dérivée première prend la valeur v'_0.

476. Achevons de déterminer l'équation différentielle des lignes géodésiques en calculant les fonctions L, M, N, P. Remarquons que u et v jouent le même rôle, sauf que, par permutation de u et v, A, B, C changent de signe; de sorte que P se déduit de L, et N se déduit de M par permutation de u et v, et changement de signe. Il nous suffit donc de calculer L, coefficient de du^3, et M, coefficient de $du^2\,dv$. Nous avons

$$L = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

et

$$M = 2\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

Je dis que tous les coefficients de l'équation (2) s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Il suffit de le montrer pour L et M. En développant chaque déterminant par rapport aux éléments de la seconde ligne, nous avons

$$L = \sum_{x,y,z} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$M = 2\sum\left(B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum\left(B\frac{\partial z}{\partial v} - C\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

Formons $B\dfrac{\partial z}{\partial u} - C\dfrac{\partial y}{\partial u}$:

$$\begin{aligned} B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] - \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}\left[E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right] - \frac{\partial x}{\partial u}\left(F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ &= E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned}$$

En permutant u et v, le premier membre se transforme en $-B\dfrac{\partial z}{\partial v} + C\dfrac{\partial y}{\partial v}$; le second, en $G\dfrac{\partial x}{\partial u} - F\dfrac{\partial x}{\partial v}$, de sorte qu'on a

$$B\frac{\partial z}{\partial v} - C\frac{\partial y}{\partial v} = F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}.$$

En portant ces valeurs dans L et M, il vient

$$L = E\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} - F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$M = 2E\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} - 2F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} - G\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Toutes les quantités figurant dans ces formules sous les signes $\sum$ s'expriment (n° **470**, p. 266) en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Donc, tous les coefficients de l'équation différentielle des lignes géodésiques ne dépendent que de E, F, G et de leurs dérivées.

Il en résulte que, *dans l'application de deux surfaces l'une sur l'autre, les lignes géodésiques de l'une ont pour courbes transformées les lignes géodésiques de l'autre;* autrement dit, la propriété pour une ligne d'être géodésique se conserve dans la déformation.

477. Nous allons chercher une autre formé de l'équation différentielle des lignes géodésiques. Prenons comme paramètre, sur une telle ligne considérée comme inconnue, l'arc s de la courbe; u, v seront des fonctions de s liées par la relation

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Pour exprimer que la ligne en question est ligne géodésique, il faut exprimer que sa normale principale en chaque point est normale à la surface, c'est-à-dire perpendiculaire aux deux directions de coefficients

$$\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Or, étant donnée une courbe, si l'on prend l'arc comme variable indépendante, la normale principale a pour coefficients $\frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^2 y}{ds^2}, \frac{d^2 z}{ds^2}$. On a, en effet, avec les notations habituelles,

$$\frac{\alpha_1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2 x}{ds^2}.$$

On a donc les deux conditions

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2 x}{ds^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2 x}{ds^2} = \quad . \tag{5}$$

Nous allons leur donner une forme différente. Écrivons pour cela

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds} - \frac{dx}{ds}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds},$$

de sorte que la première condition (5) peut s'écrire

$$\frac{d}{ds}\sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{dx}{ds}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds} = 0.$$

Remplaçons $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}$, nous aurons

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{ds},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = {} & \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ & + \left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\left(\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) \\ & + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right].$$

La première condition (5) prend donc la forme suivante :

$$(6)\quad \frac{2\,d\left(\mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0;$$

de même, la seconde condition est

$$(7)\quad \frac{2\,d\left(\mathrm{F}\frac{du}{ds} + \mathrm{G}\frac{dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0.$$

Nous avons deux équations différentielles du second ordre par rapport à u et v considérés comme fonctions de s. A ces deux équations

il faut joindre la relation

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

Ces relations vont nous être utiles pour démontrer une propriété importante des lignes géodésiques.

178. *Calcul des variations.* — Considérons, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées, deux points $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ et une courbe C passant par ces deux points, d'équation

$$y = f(x).$$

Supposons qu'on donne une fonction $V(x, y, y')$ dépendant de x, de $y = f(x)$ et de la dérivée de y par rapport à x, qu'on suppose exister en tout point. A une courbe C déterminée joignant les points A et B correspond, pour la fonction V, une valeur déterminée.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\,dx,$$

qui est en quelque sorte une intégrale curviligne prise le long de C. Proposons-nous de déterminer la courbe C de telle manière que U ait sa valeur minimum.

Supposons le problème résolu, et soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe cherchée. Faisons rentrer cette courbe dans une famille de courbes dépendant d'un paramètre. Nous obtiendrons ce résultat en prenant, par exemple, la famille de courbes suivante :

$$y = F(x, \alpha) = f(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1)\varphi(x, \alpha),$$

φ étant une fonction arbitraire de x et de α assujettie seulement à conserver une valeur finie et à avoir des dérivées également finies. On reconnaît que pour $\alpha = 0$ on obtient la courbe C. De plus, on a, quel que soit α,

$$F(x_0, \alpha) = f(x_0), \qquad F(x_1, \alpha) = f(x_1).$$

L'équation $y = F(x, \alpha)$ représente donc bien une famille de courbes passant toutes par A et B, et cette famille renferme la courbe C.

Si, dans U, on fait $y = F(x, \alpha)$, U devient une certaine fonction de α, qui doit avoir sa valeur minimum pour $\alpha = 0$. Une condition nécessaire pour cela est que la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ soit nulle pour $\alpha = 0$.

Remarquons que y est fonction de x et de α, qu'on a $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ et que $F(x, \alpha)$ prend, quel que soit α, la même valeur pour $x = x_0$; de même pour $x = x_1$. Il en résulte que $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ doit être nul pour $x = x_0$ et $x = x_1$, quel que soit α.

Cela étant, nous avons

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial \alpha} dx.$$

Évaluons $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, V dépendant de α par l'intermédiaire de y et de y' :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \alpha} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x}\right] dx.$$

Transformons l'intégrale $\int \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} dx$; on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} dx = \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \int \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} dx,$$

en entendant par $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)$ la dérivée de $\frac{\partial V}{\partial y'}$ prise en considérant y et y' comme fonctions de x. Prenons les intégrales définies, nous avons

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} dx = \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} dx.$$

Comme $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ est nul pour $x = x_0$ et $x = x_1$, la première expression

du second membre est nulle, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} \right] dx,$$

et cette quantité doit être nulle pour que U puisse être minimum pour la courbe C. Je dis que, si la fonction U est minimum pour l'arc AB de la courbe C, elle l'est aussi pour une portion quelconque de l'arc. En effet, si elle ne l'était pas, il y aurait deux points A_1, B_1 entre lesquels on trouverait un nouvel arc A_1B_1 pour lequel la fonction U aurait une valeur moindre. En raccordant cet arc aux arcs AA_1 et B_1B de C, on aurait une nouvelle courbe pour laquelle U aurait une valeur plus petite que pour la courbe C, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

La fonction U étant minimum pour une portion quelconque de l'arc, je dis qu'il en résulte qu'on a, en tout point de l'arc,

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} = 0.$$

En effet, supposons que le premier membre de cette équation ait une valeur positive pour tous les points d'un certain arc; on peut trouver pour y une fonction $F(x, \alpha)$ telle que $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ soit positif, autrement dit on peut faire rentrer la courbe à laquelle appartient l'arc considéré dans un faisceau tel qu'en passant d'une courbe du faisceau à l'autre, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ reste différent de 0 et positif. Dans ces conditions, $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ aurait une valeur différente de 0, ce qui serait contraire à l'hypothèse. En résumé, une condition nécessaire pour que l'intégrale U soit minimum le long de la courbe C est qu'on ait, en tout point de C,

$$\frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Dans chaque question particulière, il y a lieu de voir si cette équation, qui est une équation différentielle du second ordre en y, définit une courbe déterminée à laquelle correspond effectivement un minimum pour U.

479. *Plus courte distance de deux points sur une surface.* —

Soient (u_0, v_0), (u_1, v_1) les coordonnées curvilignes de deux points donnés A et B sur une surface. Définissons une courbe passant par ces deux points par une relation de la forme $v = \varphi(u)$, et cherchons à quelle relation doit satisfaire la fonction φ pour que l'arc AB de cette courbe soit minimum. La longueur de cet arc AB est

$$U = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du,$$

v étant remplacé dans la fonction sous le radical par $\varphi(u)$. En appliquant l'équation (8) du numéro précédent, on voit qu'une condition nécessaire pour que U soit minimum est qu'on ait

$$\frac{d\left(\dfrac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\right)}{du} - \frac{\dfrac{\partial E}{\partial v} + 2\dfrac{\partial F}{\partial v}v' + \dfrac{\partial G}{\partial v}v'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} = 0.$$

En introduisant la différentielle ds de l'arc, qui est égale à $\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du$, cette condition s'écrit

$$(9)\qquad \frac{2\, d\left(\dfrac{F\,du + G\,dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0.$$

C'est l'une des conditions que nous avons obtenues (n° 477) pour qu'une ligne soit géodésique sur la surface. En intervertissant le rôle de u et v, on montrerait que cette ligne satisfait aussi à l'autre condition. Donc, *le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface ne peut être qu'une ligne géodésique.*

Cela étant, supposons qu'on ait tracé sur la surface : 1° une famille de lignes géodésiques telles que par un point de la surface passe une ligne de cette famille et une seule ; 2° une famille de courbes orthogonales aux premières. Rapportons la surface à ces deux familles prises comme courbes coordonnées : prenons comme courbes $v =$ const. les géodésiques, comme courbes $u =$ const. les courbes orthogonales. Cherchons la forme des fonctions E, F, G. On a d'abord

$$F = 0.$$

En second lieu, la ligne $v =$ const. doit satisfaire à l'équation (9). On reconnaît que cela exige

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

E se réduit donc à une fonction de u. Le carré de l'élément linéaire de l'arc est, par suite, de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}(u)\,du^2 + \mathrm{G}(u, v)\,dv^2.$$

Prenons un nouveau paramètre tel que sa différentielle soit égale à $\sqrt{\mathrm{E}(u)}\,du$. On voit que ds^2 prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}(u, v)\,dv^2,$$

et, pour une ligne géodésique, nous aurons

$$ds^2 = du^2.$$

La distance de deux points $\mathrm{A}(u_0, v_0)$, $\mathrm{B}(u_1, v_0)$ sur une géodésique est donc

$$|s_1 - s_0| = |u_1 - u_0|.$$

Considérons une autre courbe joignant les points A et B. La longueur de l'arc AB sur cette courbe est

$$\mathrm{L} = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + \mathrm{G}v'^2}\,du.$$

C'est l'intégrale de l'expression $\sqrt{1 + \mathrm{G}v'^2}$, qui est constamment supérieure à 1, c'est-à-dire à la dérivée de u. Donc la valeur absolue de L est supérieure à $|u_1 - u_0|$ et, par suite, à $|s_1 - s_0|$. *Les lignes géodésiques sont donc bien des courbes de longueur minimum*, tout au moins dans une région suffisamment petite.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Produits infinis.

180. Considérons une suite de quantités réelles ou complexes u_1, u_2, ..., u_n, ... et formons le produit

$$P_n = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Si ce produit tend vers une limite finie P *quand n croît indéfiniment, on dit que le produit infini*

$$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

est convergent et a pour valeur cette valeur limite.

Soit, par exemple, une série convergente

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

dont la somme est s. Le produit

$$e^{a_1} e^{a_2} \ldots e^{a_n}$$

est égal à $e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$. Par suite, lorsque n grandit indéfiniment, il a pour limite e^s. Nous dirons que le produit infini de facteur général e^{a_n} est un produit infini convergent.

Comme pour les séries, on peut, dans l'étude de la convergence d'un produit infini, supprimer un nombre fini de termes au commencement du produit.

Remarquons que, si un facteur est nul, tous les produits à partir d'un certain rang sont nuls, leur limite est zéro.

181. Cela posé, considérons un produit infini de la forme

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots$$

Je dis qu'*un produit de cette forme, où les nombres* u_1, u_2, ...

u_n, ... sont réels et positifs, est convergent ou non en même temps que la série de terme général u_n est convergente ou non.

En effet, supposons d'abord cette série divergente ; la somme de ses n premiers termes tend vers $+\infty$ avec n. Or, on a

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) > 1+u_1+\ldots+u_n;$$

donc P_n tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que la série soit convergente. On a

$$e^{u_1} > 1+u_1, \qquad e^{u_2} > 1+u_2, \qquad \ldots, \qquad e^{u_n} > 1+u_n,$$

d'où

$$e^{u_1+u_2+\ldots+u_n} > (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n).$$

Quand n grandit indéfiniment, le premier membre, par suite de la convergence de la série, tend vers une limite. Le second membre, qui est P_n, va en croissant et reste inférieur à cette limite ; il a donc, lui aussi, une limite P.

Je dis que *cette limite est indépendante de l'ordre des facteurs du produit*, c'est-à-dire que si l'on opère un déplacement de termes dans la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, de façon à former une suite $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ composée des mêmes termes écrits dans un autre ordre, le produit

$$P'_n = (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)$$

est convergent et a même limite que le premier. D'abord, il est convergent parce que la série

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$$

est convergente. Soit P′ sa limite.

Fixons un nombre n, et prenons q assez grand pour que, parmi les q premiers termes v, se trouvent les n termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Nous aurons, comme tous les facteurs sont supérieurs à 1,

$$P_n \leqq P'_q \leqq P'.$$

On en déduit, en faisant croître n indéfiniment,

$$P = \lim P_n \leqq P'.$$

On montrerait de même que l'on a $P' \leqq P$. En résumé, on a

$$P = P',$$

ce qui démontre la proposition.

482. Théorème général. — *Si $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont des nombres complexes formant une série absolument convergente, le produit*

$$(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$$

est convergent; il a une valeur différente de zéro, à moins que l'un des facteurs ne soit nul; cette valeur est indépendante de l'ordre des facteurs.

1° Gardons les notations précédentes, et posons, en outre,

$$u'_n = |u_n|$$

et

$$P'_n = (1+u'_1)\ldots(1+u'_n).$$

La série

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

étant par hypothèse convergente, le produit P'_n, qui rentre dans le cas du n° 481, est convergent; soit P' sa limite. Donnons-nous un nombre positif ε. En vertu du théorème de Cauchy sur les limites (t. I, p. 15) et du fait que P'_n tend vers P', il existe un entier p tel que, pour $n > p$, on a, quel que soit $h > 0$,

$$P'_{n+h} - P'_n < \varepsilon.$$

Formons, d'autre part, l'expression $P_{n+h} - P_n$:

$$P_{n+h} - P_n = (1+u_1)\ldots(1+u_n)[(1+u_{n+1})\ldots(1+u_{n+h}) - 1].$$

On voit que le second membre, si on le suppose développé, est une somme de termes dont chacun est le produit de certains facteurs u et est affecté d'un coefficient positif. L'expression $P'_{n+h} - P'_n$ diffère de la précédente en ce que chaque quantité u_n est remplacée par u'_n, de sorte que les termes de cette seconde expression sont égaux respectivement aux modules de ceux de la première. Il en résulte qu'on a

$$|P_{n+h} - P_n| \leqq P'_{n+h} - P'_n$$

et, par suite,

$$|P_{n+h} - P_n| < \varepsilon.$$

En résumé, à tout nombre positif ε correspond un entier p tel que l'on a, pour $n > p$ et $h > 0$,

$$|P_{n+h} - P_n| < \varepsilon.$$

Cela prouve, d'après le théorème de Cauchy (p. 4), que la quantité P_n a, pour n infini, une limite déterminée.

2° Je dis que, *si aucun facteur du produit n'est nul, cette limite* P *est différente de zéro.*

u_n tendant vers zéro, on a, pour n supérieur à un certain entier p,

$$|u_n| < 1.$$

Mettons de côté les termes pour lesquels cette inégalité n'a pas lieu, c'est-à-dire supprimons au commencement du produit les termes de rang inférieur ou égal à p, et supposons que parmi ces termes aucun ne soit nul. Tout revient à montrer que le produit infini commencé au $(p+1)^{\text{ième}}$ terme a une limite différente de zéro, ou, en d'autres termes, qu'un produit infini dans lequel tous les u sont plus petits que 1 en module a une limite différente de zéro. On a en effet, dans ces conditions,

$$1 + u_n \neq 0.$$

L'inverse de cette quantité est un nombre fini que nous écrivons

$$1 - \frac{u_n}{1+u_n},$$

de sorte que nous avons

$$\frac{1}{P_n} = \left(1 - \frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{u_n}{1+u_n}\right).$$

Je dis que ce produit $\frac{1}{P_n}$ a, pour n infini, une limite finie, c'est-à-dire que c'est un produit infini convergent. Posons

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n};$$

nous avons, comme u_n tend vers o,

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Donc la série de terme général v_n est absolument convergente, comme la série des u_n. Par suite (1°), le produit $\frac{1}{P_n}$ est convergent; donc le produit P_n a une limite différente de zéro.

3° Montrons enfin que cette limite P est indépendante de l'ordre des facteurs.

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ écrites

dans un autre ordre. Posons

$$Q_n = (1 + v_1)(1 + v_2)\dots(1 + v_n),$$
$$v'_n = |v_n|,$$
$$Q'_n = (1 + v'_1)(1 + v'_2)\dots(1 + v'_n).$$

La série de terme général v_n étant absolument convergente, le produit Q_n est convergent; soit Q sa limite. D'autre part, P'_n et Q'_n (qui rentrent dans le cas du n° 481) ont des limites P' et Q' qui sont égales.

Donnons-nous un nombre positif ε; nous pouvons trouver un entier p tel que l'on ait, quel que soit $h > p$,

$$|P'_h - P'| < \varepsilon, \qquad |Q'_h - Q'| < \varepsilon.$$

h étant choisi plus grand que p, prenons un entier $h' > h$ assez grand pour que tous les facteurs $(1 + u_1), \dots, (1 + u_h)$ appartiennent au produit $Q_{h'}$. On reconnaît que dans ces conditions l'expression $Q_{h'} - P_h$ est une somme de termes dont chacun est le produit de certains facteurs u. On en déduit, comme plus haut (*cf.* 1°),

$$|Q_{h'} - P_h| \leqq |Q'_{h'} - P'_h| \leqq |Q'_{h'} - Q'| + |P'_h - P'|,$$

d'où

$$|Q_{h'} - P_h| < 2\varepsilon.$$

Quand h grandit indéfiniment, h' grandit aussi indéfiniment, $Q_{h'}$ et P_h tendent respectivement vers Q et P, et l'on a

$$|Q - P| < 2\varepsilon;$$

ε étant arbitraire, cela montre que l'on a

$$Q = P,$$

ce qui démontre la proposition.

On dit, dans ces conditions, que l'on a *un produit infini absolument convergent*.

483. Considérons maintenant un produit infini dans lequel *les facteurs sont fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes*. Le produit infini constitue lui-même une fonction de ces variables. Posons, comme précédemment,

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n);$$

nous avons

$$P_{n+1} = P_n(1 + u_{n+1}) = P_n + u_{n+1}P_n.$$

et, si le produit est convergent et a pour limite P, nous pouvons écrire

$$P = \lim P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots + (P_{n+1} - P_n) + \ldots,$$

ou, d'après la relation précédente,

$$P = 1 + u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \ldots + P_n u_{n+1} + \ldots.$$

Nous avons dans le second membre de cette relation une série; nous dirons qu'*elle est équivalente au produit donné*.

Supposons que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ forment une série *normalement convergente*, c'est-à-dire qu'il existe des nombres positifs $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ formant une série convergente et tels que

$$u_n \leq g_n$$

dans les domaines que l'on considère. Posons

$$G_n = (1 + g_1)(1 + g_2)\ldots(1 + g_n).$$

Le produit G_n rentre dans le cas du n° 481 et a une limite G quand n croît indéfiniment. D'autre part, de

$$u_n \leq g_n$$

on déduit, d'après un raisonnement déjà fait,

$$P_n \leq G_n.$$

Considérons alors la série numérique à termes positifs

$$1 + g_1 + G_1 g_2 + \ldots + G_n g_{n+1} + \ldots;$$

d'après les remarques faites, elle est convergente et a pour valeur G. La série

$$1 + u_1 + P_1 u_2 + \ldots + P_n u_{n+1} + \ldots$$

a ses termes respectivement inférieurs ou égaux en module aux termes de cette série; donc elle est normalement convergente. On en déduit les conséquences suivantes (n°s 235 et 238, p. 31 et 34):

Si les u sont fonctions continues d'une ou plusieurs variables réelles dans un certain domaine relatif à ces variables où la série des u est normalement convergente, le produit P *est dans le même domaine une fonction continue des mêmes variables.*

Si les u sont fonctions holomorphes de variables complexes dans un certain système de domaines A, B, C, ... *où la série des u est normalement convergente, le produit* P *est une fonction holomorphe en tout point intérieur aux domaines* A, B, C, ...

484. *Dérivée logarithmique d'un produit infini.* — Soit

$$f(z) = (1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$$

un produit infini, les u_n étant fonctions holomorphes d'une variable complexe z, et la série $\sum u_n$ étant normalement convergente dans un domaine D. Soit α_n la borne supérieure de $|u_n|$ dans D; α_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Prenons un nombre ρ tel que $0<\rho<1$; quand n dépasse un certain entier p, on a $\alpha_n < \rho$. Posons

$$f(z) = (1+u_1)\ldots(1+u_p)\varphi(z), \tag{1}$$

$$\varphi(z) = (1+u_{p+1})\ldots(1+u_n)\ldots. \tag{2}$$

D'autre part, en supposant $|u|<1$, désignons par $\mathrm{Log}(1+u)$ la détermination du logarithme qui s'annule avec u, et qui est représentée (nº 253, p. 53) par la série

$$\frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \ldots.$$

Cette série représente une fonction holomorphe dans tout le cercle $|u| \leqq \rho$, puisqu'on a $\rho < 1$.

Le rapport de cette fonction à u est égal à la série

$$1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + \ldots$$

qui, étant comme la précédente, holomorphe dans le cercle $|u| \leqq \rho$, reste dans ce cercle inférieure en module à un nombre fini M. On a donc, sous la condition $|u| \leqq \rho$,

$$|\mathrm{Log}(1+u)| \leqq \mathrm{M}\,|u|$$

et par suite, pour $n > p$,

$$|\mathrm{Log}(1+u_n)| \leqq \mathrm{M}\alpha_n.$$

On en déduit que la série

$$\mathrm{Log}(1+u_{p+1}) + \ldots + \mathrm{Log}(1+u_n) + \ldots \tag{3}$$

est normalement convergente dans D; elle représente donc une fonction holomorphe en tout point intérieur à D, soit $g(z)$; on déduit de (3)

$$e^{\mathrm{Log}(1+u_{p+1})} \times \ldots \times e^{\mathrm{Log}(1+u_n)} \times \ldots = e^{g(z)}$$

ce qui s'écrit

$$\varphi(z) = (1+u_{p+1})\ldots(1+u_n)\ldots = e^{g(z)}.$$

Par conséquent, $g(z)$ est, pour chaque valeur de z, égale à une détermination de $\operatorname{Log}\varphi(z)$.

La série (3), étant normalement convergente dans D, peut être dérivée terme à terme, en tout point intérieur à D (n° 238, p. 36); en outre, si D_1 est formé des points de D dont la distance à la frontière de D surpasse un nombre positif r, la série dérivée est normalement convergente dans D_1. En formant cette série et remarquant que la dérivée de toute détermination de $\operatorname{Log}\varphi(z)$ est $\frac{\varphi'}{\varphi}$, on obtient

$$(4) \qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{u'_{p+1}}{1+u_{p+1}} + \ldots + \frac{u'_n}{1+u_n} + \ldots.$$

Chacune des p fonctions $(1+u_1), \ldots, (1+u_p)$, étant holomorphe, a, dans un domaine borné, un nombre *fini* de zéros (n° 269, p. 67).

Soit A un point intérieur à D et pour lequel $f(z)$ est différent de 0; aucun des facteurs précédents n'est nul en A. Nous pouvons prendre un domaine borné Δ auquel A soit intérieur, ne contenant aucun zéro de $f(z)$, et contenu dans une région telle que D_1 obtenue par le procédé rappelé.

Chacune des fonctions $\frac{1}{1+u_1}, \ldots, \frac{1}{1+u_p}$ est holomorphe en tout point de Δ, donc reste bornée en module dans Δ qui est fermé et borné; il en est de même de $u'_1, u'_2, \ldots, u'_p$, de sorte que les p fonctions $\frac{u'_1}{1+u_1}, \ldots, \frac{u'_p}{1+u_p}$ sont bornées en module dans Δ. Cela étant, par dérivation logarithmique de (1), et en tenant compte de (4), on obtient

$$(5) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{u'_1}{1+u_1} + \ldots + \frac{u'_n}{1+u_n} + \ldots.$$

Cette formule est établie pour tout point A qui n'annule pas $f(z)$, et la série du second membre est normalement convergente dans tout domaine tel que Δ (par exemple, il y a certainement un cercle de centre A dans lequel la convergence normale est réalisée); par suite, *on peut effectuer la dérivation logarithmique du produit $f(z)$, et dériver indéfiniment la formule obtenue, le résultat restant toujours valable pour tout point autre qu'un zéro de $f(z)$.*

485. Comme application, partons de la formule (p. 76)

$$\cot z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \ldots + \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} + \ldots$$

valable quand z n'est pas multiple de π.

Les termes de cette série sont les dérivées logarithmiques des expressions

$$z, \quad 1-\frac{z^2}{\pi^2}, \quad \ldots, \quad 1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}, \quad \ldots.$$

Formons alors le produit

$$(1) \qquad z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

La série $\sum \frac{z^2}{n^2\pi^2}$ est normalement convergente dans tout domaine borné; par suite, le produit considéré représente une fonction $f(z)$ holomorphe dans tout domaine borné, par suite dans tout le plan, autrement dit une fonction entière. Par application du n° 484, on peut opérer la dérivation logarithmique de cette série, ce qui donne

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \cot z.$$

Mais la fonction $\sin z$ a aussi pour dérivée logarithmique $\cot z$; on en déduit que le rapport $\frac{\sin z}{f(z)}$ est égal à une constante A. Pour déterminer A, donnons à z une suite de valeurs tendant vers o; on reconnaît, d'après (1), que $\frac{f(z)}{z}$ tend vers 1 comme $\frac{\sin z}{z}$; donc $A = 1$. En résumé, on a

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

On peut, en partant de là, obtenir un développement en produit infini de $\cos z$. On a, en effet,

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2\sin z}$$

et

$$\sin 2z = 2z\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4z^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots$$

En portant cette valeur ainsi que celle de $\sin z$ dans la relation précédente et en remarquant, une fois le facteur $2z$ supprimé, que les termes du dénominateur sont les termes de rang pair du numérateur, il vient

$$\cos z = \left(1-\frac{z^2}{\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2m-1)^2\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots$$

Remarquons que l'on retrouve bien ainsi, en annulant les différents

facteurs du produit, les zéros de $\cos z$, de même que le développement de $\sin z$ met en évidence les zéros de $\sin z$.

486. Il y a lieu de remarquer que, dans le développement de $\sin z$, chaque terme, sauf le facteur z, peut être décomposé en un produit de deux facteurs du premier degré ; mais le produit infini

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)\cdots$$

que l'on obtient ainsi ne satisfait pas aux conditions de convergence. En effet, les quantités u correspondantes ne forment pas une série convergente. Mais je dis qu'on peut écrire

$$\sin z = z\prod\left[\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}\right]\left[\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)e^{-\frac{z}{m\pi}}\right],$$

en considérant comme facteur du produit $\prod$ chaque expression

$$\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}$$

pour $m=\pm 1, \pm 2, \ldots$. Pour montrer que ce produit infini est convergent, posons

$$1+U_m=\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}.$$

U_m tend vers 0 avec $\frac{z}{m}$. Évaluons l'ordre de grandeur de U_m par rapport à $\frac{z}{m}$ quand $\frac{z}{m}$ tend vers 0 ; cela revient à évaluer l'ordre de grandeur de $\operatorname{Log}(1+U_m)$ (en désignant ainsi la détermination du Log qui s'annule avec U_m). Or, nous avons

$$\operatorname{Log}(1+U_m)=\frac{z}{m\pi}+\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)=\frac{z}{m\pi}-\left[\frac{z}{m\pi}+\frac{z^2}{2m^2\pi^2}+\ldots\right],$$

$$\operatorname{Log}(1+U_m)=-\frac{z^2}{2m^2\pi^2}-\ldots.$$

U_m est donc comparable à $\frac{z^2}{m^2}$, en entendant par là que le rapport de U_m à $\frac{z^2}{m^2}$ tend vers un nombre fini quand m tend vers $\pm\infty$, par suite, la série de terme général U_m ($m=\pm 1, \pm 2, \ldots$) est normalement convergente dans tout domaine borné. On en conclut (n° 483) que $\prod(1+U_m)$ est holomorphe dans tout domaine borné, et, par suite, dans tout le plan.

D'ailleurs ce produit est évidemment équivalent au produit qui représente $\sin z$, car si l'on groupe les termes comme il est indiqué, en prenant deux valeurs de m égales et de signes contraires, le produit de ces deux facteurs est égal au terme général du produit $\sin z$.

En résumé, on peut écrire

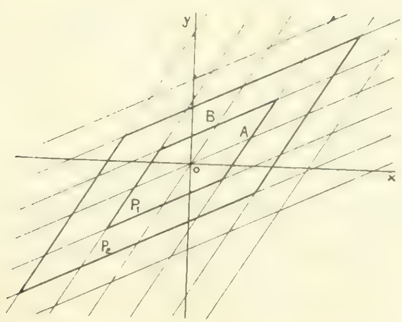
$$\sin z = z \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) e^{\frac{z}{m\pi}} \right\} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction $\sin z$ et, d'une façon générale, toutes les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles sont des fonctions à une période. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de définir des fonctions analytiques de z à deux périodes.

II. — Définition de σu, ζu, pu.

487. Soient a et b deux nombres complexes dont le rapport est non réel. Ils sont représentés dans le plan par deux points A et B non en ligne droite avec O. Considérons les nombres de la forme $ma + nb$, où m et n prennent tous les couples de valeurs entières. Leurs points représentatifs sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes construit sur OA, OB (*fig.* 44).

Fig. 44.



Cela posé, étudions la série à termes positifs

$$\sum{}' \frac{1}{|ma + nb|^{\lambda}},$$

λ étant un nombre positif et $\sum'$ indiquant la somme des termes

obtenus en donnant à m et n tous les couples de valeurs entières possibles, sauf le couple $m=n=0$, l'accent étant mis pour rappeler cette exclusion.

Je dis que, *si λ est plus grand que 2, cette série est convergente.* En effet, groupons les points $ma+nb$ de la façon suivante. Prenons d'abord le parallélogramme P_1 de centre O, tel que A et B soient milieux de côtés pour ce parallélogramme. Il y a sur P_1 huit points qui sont sommets du réseau. De plus, on voit que l'on obtiendra tous les sommets du réseau en prenant successivement tous les parallélogrammes $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots, P_h$ étant homothétique de P_1 par rapport à O, le rapport d'homothétie étant h (*fig.* 44).

Soit ρ un nombre positif tel que le cercle de centre O et de rayon ρ soit intérieur à P_1. Les huit sommets situés sur P_1 ont des modules supérieurs à ρ, de sorte que, pour chacun de ces huit sommets, nous avons

$$\frac{1}{|ma+nb|^\lambda} < \frac{1}{\rho^\lambda}.$$

P_2 contient 2.8 sommets, et le module de chaque terme correspondant de la série est plus petit que $\frac{1}{(2\rho)^\lambda}$. D'une façon générale, P_h contient $8h$ sommets, et le module de chaque terme correspondant de la série est plus petit que $\frac{1}{(h\rho)^\lambda}$. Il en résulte que l'on a

$$\sum{}' \frac{1}{|ma+nb|^\lambda} < 8\left(\frac{1}{\rho}\right)^\lambda + 2.8\left(\frac{1}{2\rho}\right)^\lambda + \ldots + h.8\left(\frac{1}{h\rho}\right)^\lambda + \ldots,$$

d'où

$$\sum{}' \frac{1}{|ma+nb|^\lambda} < \frac{8}{\rho^\lambda}\left(1 + \frac{1}{2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{1}{h^{\lambda-1}} + \ldots\right).$$

Si $\lambda > 2$, $\lambda - 1$ est supérieur à 1 et la quantité entre crochets est une série convergente. Par conséquent, la série de terme général $\frac{1}{|ma+nb|^\lambda}$ est convergente si $\lambda > 2$ (les termes de cette série peuvent être écrits dans un ordre quelconque).

488. Remplaçons dans ce qui précède a par 2ω et b par $2\omega'$. On pose

$$\sigma u = u \prod{}' \left[\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}\right],$$

σu étant mis pour $\sigma(u)$, $\prod'$ désignant le produit infini des facteurs

obtenus en faisant $s = 2m\omega + 2n\omega'$, m et n prenant tous les couples de valeurs entières sauf le couple $m = n = 0$.

Nous allons d'abord montrer que $\prod'$ est convergent. Désignons le facteur général de ce produit par $1 + U$; on a

$$1 + U = \left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}.$$

U est une fonction entière de $\frac{u}{s}$. Formons $\operatorname{Log}(1 + U)$, qui est, comme l'on sait, comparable à U ; nous avons

$$\operatorname{Log}(1 + U) = \frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} - \left(\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} + \frac{u^3}{3s^3} + \ldots\right),$$

$$\operatorname{Log}(1 + U) = -\left(\frac{u^3}{3s^3} + \ldots\right).$$

La détermination de $\operatorname{Log}(1 + U)$ qui s'annule avec U est donc une fonction analytique dont le développement en série commence par un terme du troisième degré en $\frac{u}{s}$; il en est donc de même pour U.

Soit $R > 0$. Astreignons-nous d'abord à prendre u dans le cercle C : $|u| \leqq R$; soit ρ un nombre positif inférieur aux modules de tous les nombres s autres que zéro; on a, dans ces conditions,

$$\left|\frac{u}{s}\right| \leqq \frac{R}{\rho}.$$

On peut, d'autre part, écrire

$$U = \frac{u^3}{s^3}\left[A + B\frac{u}{s} + \ldots\right],$$

la série entre crochets étant fonction entière de $\frac{u}{s}$. Comme $\frac{u}{s}$ reste borné, cette série reste bornée; soit M une limite supérieure de son module. On a ainsi

$$|U| \leqq \frac{MR^3}{|s|^3}.$$

La série $\sum' \frac{1}{|s|^3}$ (les termes de cette série étant écrits dans un ordre quelconque) est convergente (n° 487); on déduit de là que la série $\sum' U$, qui a ses termes au plus égaux en module à ceux d'une série à termes positifs convergente, est normalement convergente dans C; donc le produit $\prod'(1 + U)$ représente (n° 483) une fonc-

tion holomorphe dans tout cercle C′ intérieur à C. Comme le rayon R de C est arbitraire, le produit $\prod'(1+U)$ est holomorphe dans tout le plan.

D'après cela, *σu est une fonction entière de u*. Elle ne s'annule que si l'un des facteurs est nul (nº 482). Or, le facteur général s'annule pour $u = s$, le premier pour $u = 0$; *les zéros de σu sont donc les sommets du réseau des points s, chacun d'eux est zéro simple.*

La fonction σu est impaire. En effet, le produit $\prod'$ est une fonction paire, car on peut grouper ses facteurs deux à deux en mettant dans un même groupe les facteurs correspondant à deux nombres s opposés. Si l'on change u en $-u$, chacun de ces facteurs se change en l'autre et, par suite, $\prod'$ ne change pas, σu étant égal au produit d'une fonction paire par le facteur u est une fonction impaire; on écrit

$$\sigma(-u) = -\sigma u.$$

489. Par application du principe du nº 484, on peut effectuer la dérivation logarithmique de la formule qui définit σu, puis ensuite dériver indéfiniment la formule obtenue, les résultats étant valables en tout point autre qu'un point s. On pose

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right),$$

$$p u = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2} \right],$$

$$p' u = -\frac{2}{u^3} + \sum{}' \frac{-2}{(u-s)^3}.$$

σu étant impaire, $\sigma' u$ est paire; donc ζu, $p' u$ sont impaires, $p u$ est paire. Les seuls points singuliers de ces fonctions sont les points s; soit s_0 l'un d'eux. On a, s_0 étant zéro simple de σu,

$$\sigma u = \left(1 - \frac{u}{s_0}\right) g(u) \qquad [g(s_0) \neq 0];$$

on en déduit

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u - s_0} + \frac{g'}{g}.$$

Donc ζu admet s_0 comme pôle simple, avec résidu 1. Par dérivation, on voit que $p u$ admet le même point comme pôle double, la partie principale étant $\frac{1}{(u-s_0)^2}$.

490. Considérons la formule

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} - \sum{}' \frac{2}{(u-s)^3},$$

le signe $\sum'$ étant étendu à tous les points s, sauf l'origine. On peut encore écrire

$$\wp' u = \sum \frac{-2}{(u-s)^3},$$

le signe $\sum$ étant étendu à tous les sommets du réseau sans exception.

Sous cette forme, on reconnaît que $\wp' u$ est une fonction doublement périodique ayant pour périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, augmentons u de 2ω par exemple; l'ensemble des expressions $(u-s)$ est identique à l'ensemble des expressions $(u+2\omega-s)$, car le terme $(u-s_0)$ du premier ensemble est égal au terme $[u+2\omega-(s_0+2\omega)]$ du second.

Donc $\wp' u$ ne change pas quand on augmente u de 2ω. De même, on reconnaît que $\wp' u$ admet la période $2\omega'$, de sorte que l'on a, m et n étant deux entiers quelconques,

$$\wp'(u+2m\omega+2n\omega') = \wp' u.$$

En particulier, on a

$$\wp'(u+2\omega) = \wp' u,$$

d'où, en intégrant,

$$\wp(u+2\omega) = \wp u + \text{const}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $u = -\omega$, ce qui est légitime, ce point n'étant pas sommet du réseau; il vient

$$\wp\omega = \wp(-\omega) + \text{const.},$$

et, comme $\wp u$ est une fonction paire, on déduit de là que la constante doit être nulle. On a donc

$$\wp(u+2\omega) = \wp u,$$

ce qui montre que $\wp u$ admet comme période 2ω. On verrait de même que $2\omega'$ est aussi période.

En résumé, nous voyons qu'*il existe des fonctions analytiques uniformes doublement périodiques*, à savoir la fonction $\wp u$ et toutes ses dérivées. Toute fonction uniforme, en particulier toute fonction rationnelle, de $\wp u$ et de ses dérivées, possède la même propriété.

III. — Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques.

191. Considérons, d'une façon générale, une fonction admettant pour périodes les nombres 2ω, $2\omega'$, dont le rapport est non réel. Formons comme précédemment le réseau de parallélogrammes dont les sommets sont les différents nombres $2m\omega + 2n\omega'$. Nous dirons que deux nombres complexes z, z' sont *congrus*, ou que les deux points correspondants sont *homologues*, par rapport à ce système de périodes, si la différence $z' - z$ est égale à une combinaison linéaire des périodes; on écrit alors

$$z' \equiv z \qquad (\text{mod}. 2\omega, 2\omega').$$

Les points homologues d'un point quelconque A sont tous les sommets d'un réseau de parallélogrammes obtenu en faisant subir au premier réseau une translation égale au vecteur OA. Remarquons aussi qu'étant donné un parallélogramme quelconque de périodes, par exemple celui qui a pour sommets les points 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$, tout point a un homologue dans ce parallélogramme.

192. Posons

$$(1) \qquad \omega_1 = \lambda\omega + \mu\omega',$$

λ et μ étant deux entiers positifs ou négatifs. Il est évident qu'une fonction qui admet comme périodes 2ω et $2\omega'$ admet aussi comme période $2\omega_1$.

Supposons maintenant λ et μ premiers entre eux; on peut trouver (en faisant les opérations du plus grand commun diviseur) deux entiers λ' et μ' tels que

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1.$$

Posons, dans ces conditions,

$$(2) \qquad \omega'_1 = \lambda'\omega + \mu'\omega'.$$

Les équations (1) et (2) peuvent être résolues par rapport à ω et ω'; les valeurs que l'on en tire sont de la forme

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega'_1, \qquad \omega' = \lambda'_1\omega_1 + \mu'_1\omega'_1,$$

λ_1, μ_1, λ'_1, μ'_1 étant des *entiers*. On reconnaît, d'après cela, que toute combinaison linéaire de 2ω et $2\omega'$ est combinaison linéaire de $2\omega_1$,

$2\omega'_1$, et réciproquement. On dit que *le système de périodes* 2ω, $2\omega'$ *est équivalent au système de périodes* $2\omega_1$, $2\omega'_1$. En remplaçant l'un des systèmes par l'autre, on obtient les mêmes sommets de réseaux.

Soit R l'ensemble des points s obtenus en partant d'un système de périodes 2ω, $2\omega'$; on dit que ce système de périodes est *primitif* pour une fonction si cette fonction admet ces périodes et n'admet pas de système de périodes tel que le réseau correspondant à ces nouvelles périodes comprendrait d'autres sommets que ceux de R.

493. On appelle *fonction elliptique* une fonction méromorphe doublement périodique. Par exemple, pu et toutes ses dérivées sont des fonctions elliptiques.

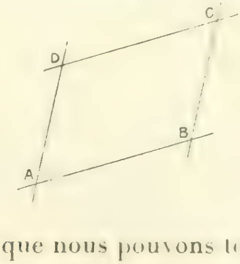
Par définition, une fonction elliptique n'a pas d'autres points singuliers que des pôles, qui sont d'ailleurs, comme pour toute fonction méromorphe, en nombre fini dans toute région limitée.

494. *Une fonction elliptique entière est nécessairement constante.* En effet, le module d'une fonction entière considérée dans un domaine borné est borné. Donc le module d'une fonction elliptique entière est borné dans un parallélogramme de périodes. Par suite de la double périodicité de la fonction, il reste donc borné dans tout le plan. D'après le théorème de Liouville (n° 265), une fonction qui possède cette propriété se réduit à une constante.

Une fonction elliptique qui ne se réduit pas à une constante a donc des pôles.

495. *Dans un parallélogramme de périodes, la somme des résidus d'une fonction elliptique* $f(u)$ *est nulle.*

Fig. 45.



Remarquons d'abord que nous pouvons toujours prendre un parallélogramme de périodes ne contenant aucun pôle sur son contour, en effectuant au besoin une translation. Soit ABCD un tel parallélo-

gramme (*fig.* 45), AB étant un vecteur équipollent au vecteur 2ω, AD au vecteur $2\omega'$.

Nous avons (*théorème des résidus*, n° 274)

$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 2i\pi \sum R,$$

$\sum R$ représentant la somme des résidus relatifs aux pôles de f contenus dans ABCD. D'autre part, considérons dans l'intégrale les deux parties

$$\int_{AB} f(u)\,du - \int_{DC} f(u)\,du.$$

Posons, quand u décrit DC,

$$u = u_1 + 2\omega'.$$

Quand le point u décrit le côté DC, u_1 décrit AB, et l'on a, à cause de la périodicité de f,

$$\int_{DC} f(u)\,du = \int_{AB} f(u_1)\,du_1 = \int_{AB} f(u)\,du,$$

d'où

$$\int_{AB} f(u)\,du - \int_{DC} f(u)\,du = 0.$$

On reconnaît de même que l'on a

$$\int_{AD} f(u)\,du - \int_{BC} f(u)\,du = 0,$$

d'où

$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 0$$

et, par suite,

$$\sum R = 0.$$

ce qui démontre la proposition.

Il résulte de là qu'*il ne peut exister de fonction elliptique ayant dans un parallélogramme de périodes un pôle simple unique*. En effet, pour un pôle simple le résidu est différent de zéro; d'ailleurs, le pôle étant unique, la somme $\sum R$ se réduirait à ce résidu et ne pourrait être nulle.

496. *Dans un parallélogramme de périodes relatif à la fonc-*

tion $f(u)$, le nombre des zéros de cette fonction est égal au nombre de ses pôles, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité.

Remarquons d'abord que les zéros sont en nombre fini, car ce sont les pôles de $\frac{1}{f(u)}$ qui est une fonction elliptique. Prenons un parallélogramme de périodes ABCD ne contenant ni pôle ni zéro sur son contour.

D'après le numéro précédent, comme $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est une fonction elliptique aux mêmes périodes que f, la somme de ses résidus dans le parallélogramme ABCD est nulle. D'autre part, cette somme est égale (n° 276, p. 71) à $\sum p - \sum q$, $\sum p$ étant le nombre des zéros de f dans le parallélogramme ABCD, $\sum q$ le nombre de ses pôles. On a donc

$$\sum p = \sum q.$$

On en déduit la conséquence suivante :

Considérons la fonction $f(u) - C$, C étant une constante. Elle a les mêmes pôles et les mêmes périodes que f. Donc elle a dans un parallélogramme de périodes un nombre de zéros égal au nombre de pôles de $f(u)$. Donc *une fonction elliptique prend dans chaque parallélogramme de périodes toute valeur finie ou infinie le même nombre de fois.* Pour appliquer ce théorème, on aura soin de prendre un parallélogramme sur le contour duquel $f(u)$ ne prend pas la valeur C.

497. *Dans un parallélogramme de périodes relatif à une fonction elliptique $f(u)$, la somme des zéros diffère de la somme des pôles d'une combinaison linéaire des périodes.*

Considérons le parallélogramme de périodes ABCD, et prenons l'intégrale

$$\int_{\text{ABCD}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = \int_{\text{AB}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{\text{DC}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du$$
$$+ \int_{\text{BC}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{\text{AD}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du.$$

Posons, sur DC,

$$u = u_1 + 2\omega';$$

quand le point u parcourt DC, le point u_1 parcourt AB, et nous avons

$$\int_{DC} \frac{uf'(u)}{f(u)}du = \int_{AB}(u_1+2\omega')\frac{f'(u_1)}{f(u_1)}du_1,$$

d'où, en mettant dans la seconde intégrale u au lieu de u_1,

$$\int_{DC} \frac{uf'(u)}{f(u)}du - \int_{AB} \frac{uf'(u)}{f(u)}du = 2\omega' \int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)}du,$$

et, de même,

$$\int_{BC} \frac{uf'(u)}{f(u)}du - \int_{AD} \frac{uf'(u)}{f(u)}du = 2\omega \int_{AD} \frac{f'(u)}{f(u)}du.$$

Pour évaluer $\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)}du$, par exemple, remarquons que, en A et B, $f(u)$ a la même valeur; la fonction primitive de $\frac{f'}{f}$, qui est une détermination de $\operatorname{Log} f(u)$, augmente, quand u va de A en B, d'un multiple de $2i\pi$; il en est de même pour $\int_{AD} \frac{f'(u)}{f(u)}du$. En revenant à l'intégrale $\int_{ABCD} \frac{uf'(u)}{f(u)}du$, on voit que l'on a

$$\int_{ABCD} \frac{uf'(u)}{f(u)}du = 2i\pi(2m\omega+2n\omega'),$$

m et n étant des nombres entiers.

Évaluons, d'autre part, cette intégrale, par application du théorème des résidus. La fonction $\frac{uf'(u)}{f(u)}$ a pour points singuliers les zéros et les pôles de f; en un point a qui est pôle ou zéro pour f, posons

$$f = (u-a)^h \varphi(u),$$

$\varphi(a)$ étant fini et différent de zéro; on en déduit

$$\frac{f'}{f} = \frac{h}{u-a} + \frac{\varphi'}{\varphi},$$

$\frac{\varphi'}{\varphi}$ étant régulière au point a. On déduit de là

$$\frac{uf'}{f} = \frac{uh}{u-a} + u\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{ah}{u-a} + h + u\frac{\varphi'}{\varphi},$$

ce qui montre que a est pôle simple pour la fonction $\frac{uf'}{f}$, le résidu correspondant étant ah. En prenant le parallélogramme de pé-

riodes ABCD de façon qu'il ne contienne aucun pôle ou zéro de f sur son contour, on voit que l'on a

$$\int_{ABCD} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = 2 i \pi \sum ah,$$

$\sum ah$ étant la somme des zéros diminuée de la somme des pôles. En comparant les deux valeurs obtenues pour l'intégrale, on a

$$\sum ah = 2 m \omega + 2 n \omega',$$

ce qui démontre le théorème. On dit encore que *la somme des zéros est congrue à la somme des pôles* (mod. 2ω, $2\omega'$).

498. *Si deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes ont les mêmes pôles et même partie principale pour chaque pôle, elles ne diffèrent que par une constante.*

Soient, en effet, $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions remplissant ces conditions, a un pôle d'ordre h pour ces deux fonctions. Écrivons, en mettant en évidence les parties principales en ce point,

$$f(u) = \frac{A}{(u-a)^h} + \frac{A_1}{(u-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{u-a} + f_1(u),$$

$$\varphi(u) = \frac{A}{(u-a)^h} + \frac{A_1}{(u-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{A_{h-1}}{u-a} + \varphi_1(u),$$

f_1 et φ_1 étant deux fonctions régulières en a. On voit que $f-\varphi$, qui est une fonction elliptique aux mêmes périodes que f et φ, est régulière en a. Comme $f-\varphi$ ne peut avoir d'autres pôles que ceux de f et de φ, et qu'elle est régulière en chacun de ces points, $f-\varphi$ se réduit à une constante (n° 494).

499. *Si deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes ont les mêmes pôles et les mêmes zéros avec le même ordre de multiplicité, leur rapport est constant.*

En effet, le rapport de ces deux fonctions a une valeur finie et différente de zéro en chaque zéro et en chaque pôle. Comme il ne peut avoir d'autres points singuliers que ces zéros ou ces pôles, il se réduit à une constante.

Il résulte de là qu'*une fonction elliptique est déterminée, à un facteur constant près, par ses pôles et ses zéros, chacun étant donné avec son ordre de multiplicité.*

IV. — Propriétés des fonctions σ, ζ, p.

500. La fonction ζu a, en O, un pôle simple de résidu 1, et l'on a (n° 489, p. 294)

$$\zeta u - \frac{1}{u} = \sum{}' \left(\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right) = -\sum{}' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right).$$

La fonction $\zeta u - \frac{1}{u}$ est holomorphe dans tout cercle C de centre O ne contenant pas de point s autre que O ; elle est donc, dans C, développable en une série entière. Écrivons donc

$$-\sum{}' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right) = A_0 + A_1 u + \ldots + A_n u^n + \ldots.$$

La série $\sum'$ du premier membre est normalement convergente dans C et peut être dérivée indéfiniment par rapport à u (n°s 484, 489) ; on a ainsi, pour $n \geqq 2$,

$$\frac{d^n \sum' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right)}{du^n} = \sum{}' \frac{n!}{(s-u)^{n+1}}.$$

En faisant $u = 0$ dans cette relation, on a

$$n!\, A_n = -\left(\frac{d^n \sum'}{du^n} \right)_0 = -n! \sum{}' \frac{1}{s^{n+1}};$$

donc

$$A_n = -\sum{}' \frac{1}{s^{n+1}}.$$

Pour $u = 0$, la somme $\sum'$ et sa dérivée première $\sum' \left[\frac{1}{(s-u)^2} - \frac{1}{s^2} \right]$ sont nulles ; donc $A_0 = A_1 = 0$. Enfin les sommes $\sum' \frac{1}{s^3}$, $\sum' \frac{1}{s^5}$, ... d'exposant impair sont nulles, parce que le réseau des s est symétrique par rapport à O. Nous avons donc, en posant $c_k = \sum' \frac{1}{s^{2k}}$,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - c_2 u^3 - c_3 u^5 - c_4 u^7 - \ldots.$$

501. Nous pouvons, d'après la théorie des fonctions analytiques,

dériver cette série terme à terme; nous obtenons ainsi, en changeant tous les signes

$$pu = \frac{1}{u^2} + 3c_2u^2 + 5c_3u^4 + 7c_4u^6 + \ldots,$$

ce développement étant valable dans le cercle C. En dérivant de nouveau, on a successivement

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 6c_2u + 20c_3u^3 + 42c_4u^5 + \ldots,$$

$$p''u = \frac{6}{u^4} + 6c_2 + 60c_3u^2 + 210c_4u^4 + \ldots.$$

Tout polynome par rapport à pu et $p'u$ est une fonction elliptique aux mêmes périodes que pu et ne peut avoir d'autres points singuliers que ceux de pu. Nous allons chercher à former un polynome en pu et $p'u$ qui soit régulier en O. Ecrivons

$$pu = \frac{1}{u^2}(1 + 3c_2u^4 + 5c_3u^6 + \ldots),$$

$$p'u = -\frac{2}{u^3}(1 - 3c_2u^4 - 10c_3u^6 - \ldots).$$

Nous sommes conduits à former $p'^2u - 4p^3u$:

$$p'^2u - 4p^3u = \frac{4}{u^6}[(1 - 3c_2u^4 - 10c_3u^6 - \ldots)^2 - (1 + 3c_2u^4 + 5c_3u^6 + \ldots)^3].$$

Les premiers termes de l'expression entre crochets sont de degré 4 par rapport à u, et l'on reconnaît que l'on a

$$p'^2u - 4p^3u = -\frac{60c_2}{u^2} - 140c_3 + \ldots,$$

les termes qui suivent le terme $140c_3$ étant égaux au produit de u^2 par une série entière en u. En comparant cette expression avec le développement de pu, nous sommes conduits, pour avoir une expression entière en u, à former

$$p'^2u - 4p^3u + 60c_2\,pu + 140c_3.$$

Ce polynome en pu et $p'u$ est une fonction elliptique de u; dans C, il est égal au produit de u^2 par une série entière en u; il s'annule pour $u = 0$. Nous pouvons trouver un parallélogramme de périodes ayant pour centre l'origine et dans lequel il ne peut avoir d'autre pôle que 0. Comme ce point n'est pas pôle, la fonction n'a

aucun pôle et se réduit, par suite, à une constante. Comme au voisinage de l'origine le développement est applicable et que pour $u = 0$ la fonction est nulle, il en résulte qu'elle est constamment nulle. *pu satisfait donc à la relation suivante :*

$$p'^2 u = 4p^3 u - 60 c_2\, pu - 140 c_3,$$

ou, en posant

$$g_2 = 60 c_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 c_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{s^6},$$

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2\, pu - g_3. \tag{1}$$

Les nombres g_2 et g_3 sont dits les *invariants* de la fonction pu.

502. En dérivant cette relation, on en déduit successivement

$$(2) \qquad \begin{cases} p'' u = 6 p^2 u - \dfrac{g_2}{2}, \\ p''' u = 12\, pu\, p' u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

L'une quelconque des dérivées de pu s'exprime donc au moyen d'un polynome en pu et $p'u$.

On a obtenu (nº 501)

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1) c_n u^{2n-2},$$

$$p'' u = \frac{6}{u^4} + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n u^{2n-4}.$$

En portant ces expressions dans la première relation (2), on obtient l'identité en u

$$\left[6 + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n u^{2n}\right]$$
$$= 6\left[1 + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1) c_n u^{2n}\right]^2 - \frac{g_2}{2} u^4.$$

En égalant les coefficients de u^4 et u^6, on a des identités. En égalant les coefficients de u^{2n} ($n \geqq 4$), on a une égalité de la forme

$$(2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n = 6[2(2n-1) c_n + \alpha c_2 c_{n-2} + \beta c_3 c_{n-3} + \ldots],$$

α, β, ... étant numériques. On tire de là une formule de la forme

$$c_n = A c_2 c_{n-2} + B c_3 c_{n-3} + C c_4 c_{n-4} + \ldots,$$

A, B, ... étant des nombres variables avec n.

Ainsi chaque coefficient c_n, à partir de c_4, s'exprime en fonction de $c_2, c_3, \ldots, c_{n-2}$.

Il en résulte que *tous ces coefficients s'expriment en fonction de c_2 et c_3, c'est-à-dire des invariants g_2 et g_3*. En d'autres termes, les sommes $\sum' \frac{1}{s^{2n}}$ s'expriment en fonction de $\sum' \frac{1}{s^4}$ et $\sum' \frac{1}{s^6}$.

503. *Homogénéité.* — Si l'on multiplie ω, ω' et u par un facteur μ, on reconnaît que tous les facteurs de σu restent invariables, sauf le facteur u ; σu est donc multiplié par μ ; de même ζu est multiplié par $\frac{1}{\mu}$, pu par $\frac{1}{\mu^2}$.

Remarquons, d'autre part, que g_2, g_3 sont, par rapport à ω, ω', homogènes et de degrés respectifs -4, -6.

504. Nous avons vu que pu, ainsi que ses dérivées, admet les périodes 2ω, $2\omega'$. Étudions l'effet de l'addition de 2ω ou $2\omega'$ à l'argument de ζu. Partons de la relation

$$p(u+2\omega)-pu=0.$$

En prenant les fonctions primitives des deux membres, nous avons

$$\zeta(u+2\omega)-\zeta u=\text{const.},$$

d'où, en faisant $u=-\omega$,

$$\zeta\omega-\zeta(-\omega)=\text{const.},$$

et, comme la fonction ζ est impaire, on voit que la constante est égale à $2\zeta\omega$, de sorte que l'on a

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta u+2\zeta\omega,$$

et, de même,

$$\zeta(u+2\omega')=\zeta u+2\zeta\omega'.$$

On pose d'ordinaire

$$\zeta\omega=\eta,\qquad \zeta\omega'=\eta',$$

d'où

$$(3)\qquad \zeta(u+2\omega)=\zeta u+2\eta,\qquad \zeta(u+2\omega')=\zeta u+2\eta'.$$

En remontant à la fonction σ, on déduit de là

$$\sigma(u+2\omega)=\sigma u\, e^{2\eta u}\, C.$$

Pour déterminer la constante c, faisons $u = -\omega$; nous avons

$$\sigma\omega = \sigma(-\omega)e^{-2\eta\omega}c,$$

et, comme σ est impaire,

$$c = -e^{2\eta\omega}.$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma(u+2\omega) = -\sigma u\, e^{2\eta(u+\omega)}, \\ \sigma(u+2\omega') = -\sigma u\, e^{2\eta'(u+\omega')}. \end{cases}$$

505. Les constantes η, η' jouent un rôle important dans les formules précédentes. Il y a d'ailleurs une relation simple entre les quatre constantes ω, ω', η, η'.

Considérons un parallélogramme de périodes ABCD ne contenant sur son contour aucun point singulier de la fonction (*fig.* 45), et prenons l'intégrale $\int_{ABCD} \zeta u\, du$. Remarquons que le contour ABCD est direct ou non suivant les valeurs relatives de ω et ω'. Évaluons

$$\int_{AB} \zeta u\, du - \int_{DC} \zeta u\, du$$

Sur DC, posons

$$u = u_1 + 2\omega';$$

quand u parcourt DC, u_1 parcourt AB, et nous avons

$$\int_{DC} \zeta u\, du = \int_{AB} \zeta(u_1 + 2\omega')\, du_1.$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\int_{DC} \zeta u\, du = \int_{AB} \zeta u_1\, du_1 - 2\eta' \int_{AB} du_1$$

En remplaçant $\int_{AB} du$ par sa valeur 2ω, nous déduisons de là

$$\int_{AB} \zeta u\, du + \int_{CD} \zeta u\, du = -4\eta'\omega.$$

Nous aurons de même

$$\int_{BC} \zeta u\, du + \int_{DA} \zeta u\, du = 4\eta\omega',$$

d'où, par addition,

$$\int_{ABCD} \zeta(u)\,du = 4\eta\omega' - 4\eta'\omega.$$

D'autre part, à l'intérieur du parallélogramme de périodes, il n'y a qu'un pôle, qui est simple et a pour résidu 1. L'intégrale précédente est donc égale à $+2i\pi$ ou $-2i\pi$ suivant que le contour est parcouru dans le sens direct ou non. On a donc la relation

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm \frac{i\pi}{2},$$

le signe qu'il faut prendre devant le second membre dépendant de la position relative des points B et D.

506. Cherchons maintenant à exprimer les fonctions elliptiques les plus générales en fonction de σ, ζ, p.

Expression d'une fonction elliptique au moyen de σ. — Soit une fonction elliptique $f(u)$ ayant pour périodes 2ω, $2\omega'$. Considérons un parallélogramme de périodes ne contenant sur son contour aucun pôle ni aucun zéro de f et contenant à son intérieur les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les pôles $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (ces points étant distincts ou non). Nous avons montré (n° 497, p. 301) que l'on a

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \quad (\text{mod.}\, 2\omega,\, 2\omega').$$

Remplaçons a_n par un nombre qui lui soit congru et tel que la congruence précédente se transforme en égalité.

Cela posé, considérons la fonction

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}.$$

Je dis que cette fonction admet la période 2ω. En effet, si nous augmentons u de 2ω, $\sigma(u-a_i)$ est multiplié (n° 504, p. 306) par $-e^{2\eta(u-a_i+\omega)}$, de sorte que le numérateur est multiplié par $(-1)^n e^{2\eta(nu-\Sigma a_i+n\omega)}$. De même, le dénominateur est multiplié par $(-1)^n e^{2\eta(nu-\Sigma b_i+n\omega)}$. Comme $\sum a_i = \sum b_i$, $\varphi(u)$ est multiplié par 1, et, par suite, admet la période 2ω. De même $\varphi(u)$ admet la période $2\omega'$. φ étant d'ailleurs méromorphe, est une fonction elliptique.

Je dis que $\frac{f}{\varphi}$, qui est, par suite, aussi une fonction elliptique, n'a pas de pôles. En effet, cette fonction ne peut avoir d'autres points singuliers que les zéros ou les pôles de f et φ. Or, en chacun de ces points, c'est-à-dire en chaque point $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, $\frac{f}{\varphi}$ a une valeur finie et différente de zéro. Donc $\frac{f}{\varphi}$ se réduit à une constante A, et l'on a, par suite,

$$f(u) = \mathrm{A}\,\varphi(u).$$

Nous avons là une expression pour une fonction elliptique dont on connaît les zéros et les pôles.

507. Comme application, considérons $pu - pa$, a n'étant pas congru à zéro, c'est-à-dire pa étant fini. Cette fonction est elliptique et a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine, un pôle unique d'ordre 2 en O. Elle a donc deux zéros dans un parallélogramme de périodes : ce sont, comme on le constate directement, a et $-a$. Ces deux zéros sont, en général, distincts ; ils ne sont confondus que si l'on a

$$a = -a + 2m\omega + 2n\omega'$$

ou

$$a = m\omega + n\omega'.$$

En mettant à part ces valeurs et appliquant le résultat précédent, nous avons

$$pu - pa = \mathrm{A}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2 u}.$$

Pour déterminer A, multiplions les deux membres de cette relation par u^2 et faisons tendre u vers zéro. Le premier membre tend vers 1, $\frac{u^2}{\sigma^2 u}$ tend vers 1 ; à la limite, on a

$$1 = \mathrm{A}\,\sigma(-a)\,\sigma a = -\mathrm{A}\,\sigma^2 a,$$

d'où

$$(5) \qquad pu - pa = -\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 u}.$$

D'ailleurs, les deux membres étant fonctions continues de a, l'égalité a encore lieu pour les valeurs $a = m\omega + n\omega'$ que nous avions mises à part ; *la formule est donc générale.*

508. Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de (5); nous obtenons

$$(6)\qquad \frac{p'u}{pu - pa} = \zeta(u + a) + \zeta(u - a) - 2\zeta u,$$

et, en permutant u et a,

$$-\frac{p'a}{pu - pa} = -\zeta(u - a) + \zeta(u + a) - 2\zeta a,$$

d'où, en ajoutant membre à membre et divisant par 2,

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa} = \zeta(u + a) - \zeta u - \zeta a.$$

En dérivant les deux membres de cette formule, nous obtenons

$$(8)\qquad p(u + a) - pu = -\frac{1}{2}\,\frac{d\,\dfrac{p'u - p'a}{pu - pa}}{du},$$

formule qui peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction pu.

En développant le second membre, il vient

$$p(u + a) - pu = -\frac{1}{2}\,\frac{p''u(pu - pa) - p'u(p'u - p'a)}{(pu - pa)^2}.$$

Permutons de nouveau u et a, et ajoutons membre à membre; il vient

$$2p(u + a) - pu - pa = -\frac{1}{2}\,\frac{p''u - p''a}{pu - pa} + \frac{1}{2}\,\frac{(p'u - p'a)^2}{(pu - pa)^2}.$$

D'autre part, d'après la relation (2) (n° 502), nous avons

$$p''u - p''a = 6p^2u - 6p^2a = 6(pu - pa)(pu + pa).$$

En portant cette valeur de $p''u - p''a$ dans la relation précédente, nous avons finalement

$$(9)\qquad p(u + a) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2 - pu - pa;$$

c'est la formule classique d'addition de pu. En la dérivant, nous aurons une expression de $p'(u + a)$ en fonction de pu, $p'u$. En résumé, nous savons exprimer $p(u + a)$, $p'(u + a)$ en fonction rationnelle des valeurs de ces fonctions pour u et a.

509. *Expression d'une fonction elliptique au moyen de ζ et de ses dérivées.* — D'après l'étude de ζ, on a, a étant une valeur quelconque de u,

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière en } a,$$

$$\zeta'(u-a) = \frac{-1}{(u-a)^2} + \text{fonction régulière en } a,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\zeta^{(\alpha-1)}(u-a) = \frac{(-1)^{\alpha-1}(\alpha-1)!}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction régulière en } a.$$

Cela posé, soit $f(u)$ une fonction elliptique ayant pour pôles a, b, ..., l, d'ordres de multiplicité respectifs α, β, ..., λ.

Mettons en évidence la partie principale de f en a; soit, au voisinage de a,

$$f(u) = \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_1}{u-a} + \text{fonction régulière en } a.$$

La fonction

$$f(u) - \left[A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \dots - \frac{(-1)^{\alpha-1}A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)\right]$$

est, d'après la manière dont elle est formée, régulière en a. Formons des développements analogues pour chacun des autres pôles b, c, ..., l, et prenons la fonction

$$\varphi(u) = f(u) - \sum_{a, b, \dots, l}\left[A_1\zeta(u-a) - \dots - \frac{(-1)^{\alpha-1}A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)\right].$$

La fonction φ ne peut avoir d'autres points singuliers que a, b, ..., l; étant régulière en chacun de ces points, elle est donc partout régulière.

Je dis qu'elle admet la période 2ω. En effet, si nous augmentons u de 2ω, les fonctions ζ', ζ'', ..., $\zeta^{(\alpha-1)}$, ..., qui sont elliptiques et de période 2ω, ne changent pas; $f(u)$, par hypothèse, ne change pas non plus; $\zeta(u-a)$ augmente de 2η, donc $\sum A_1\zeta(u-a)$ augmente de $2\eta\sum A_1$. Or $\sum A_1$ est nul, comme étant la somme des résidus de $f(u)$.

En résumé, $\varphi(u)$ est une fonction elliptique de périodes 2ω, $2\omega'$,

partout régulière. C'est donc une constante C, de sorte qu'on a

$$f(u) = C + \sum \left[A_1 \zeta(u-a) + \ldots + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!} \zeta^{(\alpha-1)}(u-a) \right]$$

Ceci nous donne *une expression de la fonction elliptique f, connaissant ses pôles et les parties principales relatives à ces pôles.*

510. *Expression d'une fonction elliptique en fonction de* pu, p'u. — *Une fonction elliptique de périodes* 2ω, $2\omega'$ *est fonction rationnelle des fonctions* pu, p'u *construites avec ces deux périodes.*

En effet, utilisons la dernière formule obtenue en remarquant que, dans le second membre, toutes les fonctions, sauf les fonctions $\zeta(u-a)$, sont, à des facteurs numériques près, égales à p et ses dérivées, par conséquent s'expriment en fonction de p et p'. Comme d'autre part, en remplaçant a par $-a$ dans (7) (n° 508), on obtient

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2} \frac{p'u + p'a}{pu - pa},$$

nous avons

$$\sum A_1 \zeta(u-a) = \zeta u \sum A_1 + \text{fonction rationnelle de } pu \text{ et } p'u;$$

$\sum A_1$ étant nul comme nous l'avons vu, il ne reste, dans l'expression de $f(u)$, que des fonctions rationnelles de pu, p'u.

511. *Deux fonctions elliptiques de mêmes périodes sont liées par une relation algébrique.* — Soient, en effet, $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions elliptiques de périodes 2ω, $2\omega'$; considérons la fonction pu construite avec ces périodes; nous avons

$$f(u) = R(pu, p'u), \qquad \varphi(u) = R_1(pu, p'u),$$

R et R_1 étant deux fonctions rationnelles. Joignons à ces deux équations la relation

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Si, entre ces trois relations algébriques, nous éliminons p et p', nous obtiendrons une relation algébrique entre f et φ, ce qui établit le fait énoncé.

512. Considérons la fonction $p'u$. On reconnaît qu'elle a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine à son intérieur, un seul pôle, à savoir : l'origine, qui est pôle triple; donc $p'u$ a, dans un parallélogramme de périodes, trois zéros (n° 496). Je dis que ces trois zéros sont congrus respectivement aux nombres ω, ω', $\omega+\omega'$. En effet, la relation

$$p'(u+2\omega) = p'u$$

donne, en faisant $u=-\omega$,

$$p'\omega = p'(-\omega) = -p'\omega,$$

d'où, comme $p'\omega$ est fini,

$$p'\omega = 0.$$

Le même raisonnement s'applique à ω' et $\omega+\omega'$; deux quelconques de ces trois nombres ne sont pas congrus entre eux, car si l'on avait, par exemple,

$$\omega' = \omega + 2m\omega + 2n\omega',$$

on en déduirait que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est réel; ainsi ces trois zéros sont distincts.

Cela étant, si nous désignons par e_1, e_2, e_3 les racines du trinome

$$4x^3 - g_2x - g_3,$$

nous avons, en vertu de la relation fondamentale (1) (n° 501, p. 304),

$$p'^2u = 4(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3).$$

Chacun des trois nombres ω, ω', $\omega+\omega'$, qui annulent $p'u$, doit annuler l'un des trois facteurs du second membre. Donc $p\omega$ doit être égal à l'un des trois nombres e_1, e_2, e_3; de même pour $p\omega'$ et $p(\omega+\omega')$.

Ces trois nombres $p\omega$, $p\omega'$, $p(\omega+\omega')$ sont distincts. En effet, on a vu que l'équation $pu = C$ a deux racines de somme nulle (n° 507); donc, pour que deux valeurs de u donnent la même valeur à p, il faut que leur somme ou leur différence soit une combinaison linéaire des périodes, ce qui n'a pas lieu pour les nombres ω, ω', $\omega+\omega'$ considérés deux à deux. Donc *les trois nombres e_1, e_2, e_3 sont distincts;*

si l'on appelle *discriminant* (¹) du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$, la quantité $g_2^3 - 27 g_3^2$, ce fait s'exprime par la condition

$$g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0.$$

V. — Cas des invariants réels.

513. Nous allons maintenant particulariser cette étude *en supposant le réseau des points s symétrique par rapport à l'axe Ox* (par suite aussi symétrique par rapport à Oy). Je dis que, dans ces conditions :

1° g_2 et g_3 sont réels, ainsi que tous les coefficients désignés par $c_2, c_3, \ldots$;

2° σ, ζ, p, p', ... prennent pour deux valeurs conjuguées de u des valeurs conjuguées, et en particulier prennent pour u réel des valeurs réelles.

Nous distinguerons, dans le réseau, d'une part les sommets situés sur Ox, d'autre part les sommets non situés sur Ox, qui se groupent par couples de deux, deux points d'un même couple étant symétriques par rapport à Ox. Dans les sommes $\sum' \frac{1}{s^4}$, $\sum' \frac{1}{s^6}$, ..., distinguons de même les termes qui se rapportent à ces deux sortes de points. Aux points situés sur Ox correspondent des termes réels. A deux points symétriques par rapport à Ox correspondent deux termes dont la somme est réelle. Donc les sommes $\sum' \frac{1}{s^4}$, $\sum' \frac{1}{s^6}$, ..., par suite les quantités g_2, g_3, c_2, c_3, ..., sont réelles.

Démontrons maintenant la seconde propriété. Rappelons que les facteurs de σ, les termes de ζ, de p ou p' sont tous des expressions contenant l'argument u et une certaine valeur de s. Soient u_0, u_1 deux valeurs imaginaires conjuguées de l'argument. A un facteur qui entre dans σu_0 et qui contient le nombre s_0, faisons correspondre

---

(¹) On ramène le polynome considéré à la forme $4(x^3 + px + q)$ en posant $p = \frac{-g_2}{4}$, $q = \frac{-g_3}{4}$, d'où résulte

$$4p^3 + 27q^2 = -\frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2).$$

dans σu_1 le facteur qui contient le nombre s_1, conjugué de s_0. A chaque facteur de σu_0 correspond ainsi un facteur et un seul de σu_1, et deux facteurs correspondants sont imaginaires conjugués.

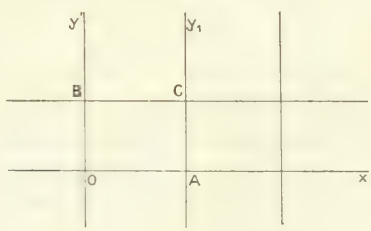
De même, les termes de ζu_1 sont les imaginaires conjugués des termes de ζu_0; il en est de même encore pour pu, $p'u$.

Donc σu_1, ζu_1, pu_1, ... sont imaginaires conjugués de σu_0, ζu_0, pu_0, ...

314. Cherchons de quelle manière le réseau des points s peut être symétrique par rapport à Ox. Soient s un sommet non situé sur Ox, s' le symétrique par rapport à Ox. En complétant le parallélogramme sur Os et Os', nous obtenons un point qui fait partie du réseau et qui est situé sur Ox. Il y a donc des sommets du réseau situés sur Ox.

Prenons le sommet situé sur Ox le plus rapproché de O; soit A

Fig. 46.



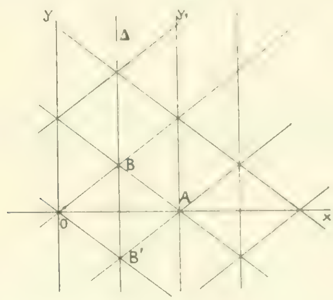
ce point (*fig.* 46). Menons par A la parallèle Ay_1 à Oy; deux cas sont possibles :

1° Il n'y a pas, entre Oy et Ay_1, de sommet du réseau. Tous les sommets sont alors sur Oy, Ay_1, et des parallèles successives équidistantes. *On a un réseau de rectangles* (*fig.* 46). Soit B le sommet le plus voisin de O situé sur Oy; un parallélogramme de périodes sera le rectangle OACB construit sur OA et OB, et nous voyons que *les périodes primitives* OA *et* OB *sont, l'une réelle, l'autre imaginaire pure.*

2° Il y a, entre Oy et Ay_1, des sommets du réseau. Soit Δ la parallèle à Oy équidistante de Oy et Ay_1 (*fig.* 47). S'il y avait un sommet C du réseau entre Oy et Δ, on en déduirait, en construisant le parallélogramme sur OC, OC' (C' étant le symétrique de C par rapport à Ox), un sommet D, situé sur Ox entre O et A, ce qui serait con-

traire au fait que A est le sommet le plus rapproché de O. Tous les sommets du réseau situés entre Oy et Ay_1 sont donc sur la droite Δ.

Fig. 47.



Soit B celui de ces sommets qui est le plus rapproché de Ox ; soit B′ son symétrique. Le parallélogramme OBAB′ est un losange ; *les périodes primitives* OB, OB′ *sont deux nombres imaginaires conjugués.*

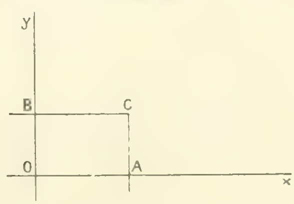
Nous allons étudier les fonctions elliptiques particulières qu'on obtient dans ces deux cas.

315. *Supposons* ω *réel et positif,* ω' *imaginaire pur ; soit*

$$\omega' = i\lambda,$$

λ *étant réel et positif.* Soient A le point ω, B le point ω' ; considérons le rectangle OACB construit sur OA, OB (*fig.* 48). Un

Fig. 48.



parallélogramme de périodes est le rectangle R ayant O pour centre, OA et OB comme demi-côtés.

Cherchons les valeurs de u qui rendent pu réel. A cause de la double périodicité de la fonction p, il suffit de chercher ces valeurs

dans un parallélogramme de périodes, par exemple dans le rectangle R. La fonction pu étant paire, il suffit d'étudier cette fonction dans la moitié du rectangle R située à droite de Oy. Enfin, la fonction prenant des valeurs conjuguées pour deux valeurs conjuguées de u, on peut se contenter d'étudier pu dans le rectangle OACB. Soient

$$u = a + bi, \qquad u_0 = a - bi$$

deux valeurs conjuguées de l'argument; comme pu et pu_0 sont conjuguées (n° 513), pour que pu soit réel, il faut et il suffit qu'on ait

$$pu = pu_0.$$

Or, nous avons vu que, pour que deux arguments donnent la même valeur à p, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit égale à une combinaison linéaire des périodes. Nous devrons donc avoir

$$u \pm u_0 = 2m\omega + 2n\omega'.$$

En remplaçant u par $a + bi$, u_0 par $a - bi$, ω' par $i\lambda$, et en prenant soit le signe $+$, soit le signe $-$, nous aurons les deux solutions

1° $$a = m\omega + ni\lambda,$$

d'où

$$n = 0, \qquad a = m\omega;$$

2° $$bi = m\omega + ni\lambda,$$

d'où

$$m = 0, \qquad b = n\lambda.$$

La première solution $a = m\omega$ nous donne, dans le rectangle OACB, les côtés OB et AC. La seconde solution, $b = n\lambda$, nous donne les côtés OA et BC.

En résumé, *dans le rectangle* OACB, pu *est réel pour tous les points du contour et pour eux seulement.*

Dans le plan, pu *est réel en tout point dont l'abscisse est un multiple de* ω *ou l'ordonnée un multiple de* λ, *et pour ces points seulement.*

516. Étudions la variation de pu sur le contour OACBO. En A, C, B, nous avons pour valeurs respectives de pu les trois nombres $p\omega$,

$p(\omega + \omega')$, $p\omega'$, qui sont égaux dans leur ensemble aux nombres e_1, e_2, e_3 (n° 512). Posons

$$p\omega = e_1, \qquad p(\omega + \omega') = e_2, \qquad p\omega' = e_3.$$

Dans le cas actuel, e_1, e_2, e_3 *sont réels et distincts*, de sorte qu'on a

$$g_2^3 - 27 g_3^2 > 0.$$

D'ailleurs, quand pu est réel, $p'u$, dont le carré est réel, ne peut être que réel ou imaginaire pur. Sur OA, $p'u$ est réel et n'a, en dehors des points O et A, ni pôle ni zéro. Donc, sur OA, pu varie toujours dans le même sens. *Il part de* $+\infty$ $\left(\text{puisque la partie principale est } \frac{1}{u^2}\right)$ *et décroît jusqu'à* e_1 *lorsque* u *varie de* 0 *à* ω.

En outre, comme $p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3$ n'est pas nul sur OA, sauf en A, on voit que e_1 *est la plus grande racine du polynome* $4x^3 - g_2 x - g_3$.

Posons $x = pu$; nous aurons, sur OA,

$$dx = p'u\, du = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}\, du,$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

d'où, en intégrant entre les limites $x = +\infty$, $x = e_1$,

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Nous exprimons ainsi ω *en fonction des invariants* g_2, g_3.

Pour étudier pu sur OB, posons

$$u = iv,$$

v allant de 0 à λ quand u décrit le côté OB. Nous devons étudier la fonction $p(iv)$ construite avec les périodes 2ω, $2\omega'$, ce qu'on désigne par

$$p(iv \mid \omega, \omega').$$

Nous avons, d'après une remarque faite sur l'homogénéité (n° 503),

$$p(iv \mid \omega, \omega') = \frac{1}{i^2}\, p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right).$$

ou

$$p(iv \mid \omega, \omega') = -p(v \mid \lambda, i\omega),$$

en remarquant que l'on peut changer l'ordre et le signe des périodes sans changer la fonction construite avec ces périodes.

Nous sommes ramenés à étudier la fonction $p(v \mid \lambda, i\omega)$ quand v va par valeurs réelles de o à λ. C'est justement l'étude que nous venons de faire. De plus, les invariants de cette nouvelle fonction p sont égaux (n° 503) aux invariants de pu multipliés respectivement par i^4 et i^6, c'est-à-dire à g_2 et $-g_3$.

En appliquant le résultat obtenu, on voit que lorsque v va de o à λ, $p(v \mid \lambda, i\omega)$ décroît de $+\infty$ à la valeur $p(\lambda \mid \lambda, i\omega)$, et cette valeur est la plus grande des racines du polynome $4x^3 - g_2x + g_3$. Or, ce polynome est, au signe près, le transformé en $-x$ du polynome $4x^3 - g_2x - g_3$. Ses racines sont donc $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$, et $-e_3$, qui est égal à $p(\lambda \mid \lambda, i\omega)$, est la plus grande de ces racines. Donc, e_3 *est la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2x - g_3$.

En résumé, *quand* u *va de* O *en* B *sur le côté* OB, *la fonction* pu *est réelle et varie de* $-\infty$ *à* e_3, e_3 *étant la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2x - g_3$. En C, pu prend la valeur e_2, qui est la racine moyenne du polynome.

Sur OB, $p'u$ est imaginaire pur, car l'accroissement de la variable est imaginaire pur.

Par application de ce qui précède, on a

$$\frac{\omega'}{i} = \lambda = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}.$$

Quant aux valeurs de pu sur AC et sur CB, elles sont également réelles; de plus, $p'u$ est réel sur BC, imaginaire pur sur AC. D'ailleurs, $p'u$ ne s'annule ni dans un cas ni dans l'autre, sauf au point C; donc pu varie toujours dans le même sens soit sur AC, soit sur CB. En résumé, *quand un point* u *parcourt le contour* OACBO, pu *est réel et décroît de* $+\infty$ *à* $-\infty$, *en passant par les valeurs* e_1 *en* A, e_2 *en* C, e_3 *en* B.

En appliquant les deux principes de symétrie énoncés au début, on en déduit la valeur de la fonction pu en tout point où elle est réelle.

517. *Supposons maintenant les deux périodes primitives ima-*

ginaires conjuguées, soit

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha - \beta i,$$

α et β étant deux nombres positifs. Nous tirons de là

$$\alpha = \omega + \omega', \qquad \beta i = \omega - \omega'.$$

Cherchons les valeurs de l'argument qui rendent pu réel. Soient deux valeurs conjuguées de l'argument

$$u = a + bi, \qquad u_0 = a - bi;$$

pour que pu soit réel, il faut et il suffit que l'on ait

$$pu = pu_0,$$

ce qui exige

$$u \pm u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant entiers.

On obtient, en prenant le signe $+$,

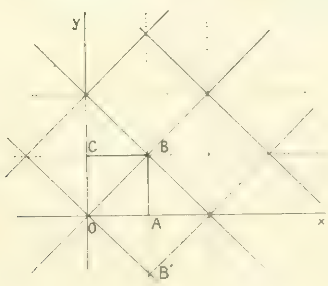
$$2a = (m+n)\alpha + (m-n)\beta i,$$

ce qui exige $m = n$, $a = m\alpha$ et, en prenant le signe $-$,

$$2bi = (m+n)\alpha + (m-n)\beta i,$$

ce qui exige $n = -m$, $b = m\beta$.

Fig. 49.



Il faut donc que a soit multiple de α ou que b soit multiple de β. Tous les points $u = a + bi$ satisfaisant à cette condition sont les points des diagonales du réseau des parallélogrammes (*fig.* 49). Nous avons ainsi tous les points d'un réseau de rectangles formé par l

parallèle à Oy menée par A, la parallèle à Ox menée par C et les parallèles équidistantes.

Posons encore

$$p\omega = e_1, \qquad p(\omega + \omega') = e_2, \qquad p\omega' = e_3.$$

Nous avons

$$p(\omega + \omega') = p\alpha = e_2.$$

e_2 est réel, e_1 et e_3 sont imaginaires conjugués, car les points ω et ω' n'appartiennent ni l'un ni l'autre au réseau de rectangles. Par suite, pour le polynome $4x^3 - g_2x - g_3$, on a

$$g_2^3 - 27g_3^2 < 0.$$

A cause de la double périodicité de pu, il suffit, pour étudier les valeurs réelles de cette fonction dans tout le plan, de les étudier sur OA et sur OC.

Lorsque u décrit OA, $p'u$ qui est réel ne s'annule pas, sauf au point A. pu varie donc toujours dans le même sens : *il décroît de $+\infty$ à e_2 lorsque u varie de o à α*. Posons encore

$$x = pu;$$

nous aurons

$$\frac{dx}{du} = p'u = -\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3},$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Intégrons entre les limites $x = +\infty$, $x = e_2$. u va de o à α, d'où

$$\alpha = -\int_{+\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Nous avons ainsi la valeur de α en fonction de g_2 et g_3.

Étudions maintenant la fonction sur OC. Posons, sur OC, $u = iv$. Quand u va de O en C, v varie de o à β. De plus, on a

$$p(iv \mid \omega, \omega') = \frac{1}{i^2}\, p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right) = -p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right).$$

Le système de périodes $\frac{2\omega}{i}$, $\frac{2\omega'}{i}$ n'est autre que le système $\beta - i\alpha$, $\beta + i\alpha$. On passe donc de la fonction étudiée à cette fonction auxiliaire $p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right)$, en permutant le rôle des deux nombres α, β.

Lorsque z varie de o à ζ, cette fonction va de $+\infty$ à la racine réelle du polynome correspondant. Or, les invariants nouveaux sont égaux aux anciens, multipliés respectivement par i^4 et i^6; ce sont donc g_2 et $-g_3$. Le polynome en x correspondant est $4x^3 - g_2x + g_3$, et ses racines sont $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$. La racine réelle est $-e_2$, et l'on a

$$-e_2 = p\left(\zeta \middle| \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right), \qquad \zeta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}.$$

La fonction auxiliaire allant de $+\infty$ à $-e_2$, la fonction donnée va de $-\infty$ à e_2.

VI. — Inversion.

518. D'après la théorie générale, g_2 et g_3 sont fonctions de ω, ω'; dans le cas du réseau symétrique par rapport aux axes, nous avons inversement obtenu les expressions de ω et ω' en fonction de g_2 et g_3. Nous allons, en restant dans ce cas, étudier d'une manière plus complète les relations entre les périodes 2ω, $2\omega'$ d'une part, et les invariants g_2, g_3 d'autre part.

Considérons le cas (n°s 515, 516) où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs; nous avons obtenu

$$(1) \quad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \qquad \frac{\omega'}{i} = \lambda = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}}.$$

Nous allons tout d'abord transformer la première intégrale. Les racines e_1, e_2, e_3 du polynome sous le radical sont réelles, et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Nous poserons

$$(2) \qquad \mu^2 = e_1 - e_3, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

On a $k^2 < 1$; en adjoignant aux deux dernières équations la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on peut les résoudre par rapport à e_1, e_2, e_3, ce qui donne

$$e_1 = \frac{(2 - k^2)\mu^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{(2k^2 - 1)\mu^2}{3}, \qquad e_3 = \frac{-(1 + k^2)\mu^2}{3}.$$

On reconnaît ainsi qu'à tout système de deux nombres positifs μ^2

et k^2 tels que $k^2 < 1$ correspond un système de trois nombres réels e_1, e_2, e_3 satisfaisant à $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, et, par suite, un polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ de discriminant positif.

Écrivons

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Nous poserons

$$x - e_3 = \frac{\mu^2}{z^2} = \frac{e_1 - e_3}{z^2},$$

z allant de 1 à 0 quand x va de e_1 à $+\infty$. On déduit de là

$$x - e_1 = x - e_3 - (e_1 - e_3) = \frac{\mu^2(1 - z^2)}{z^2},$$

$$x - e_2 = x - e_3 - (e_2 - e_3) = \frac{\mu^2(1 - k^2 z^2)}{z^2},$$

$$dx = -\frac{2\mu^2\, dz}{z^3},$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{-\mu^2\, dz}{z^3}\, \frac{z^3}{\mu^3\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

d'où, en changeant le signe de l'intégrale,

$$(3) \qquad \omega = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

Pour passer de ω à λ, il faut remplacer les nombres e_1, e_2, e_3 par $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$; par cette transformation, μ^2 reste invariable, k^2 est remplacé par le nombre

$$k'^2 = \frac{-e_2 - (-e_1)}{-e_3 - (-e_1)} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2.$$

On a donc

$$(4) \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}} \qquad (k'^2 = 1 - k^2).$$

519. Nous sommes conduits à étudier la fonction de k

$$\psi(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \qquad (k < 1).$$

Posons $z = \sin\varphi$, φ allant de o à $\frac{\pi}{2}$. Comme on a

$$dz = \cos\varphi\, d\varphi, \qquad \sqrt{1 - z^2} = \cos\varphi,$$

il vient

$$\psi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi.$$

On peut appliquer à la fonction à integrer la formule du binome, puisqu'on a

$$k^2 \sin^2\varphi \leq k^2 < 1\,;$$

on obtient une série normalement convergente, qui peut s'intégrer terme à terme, de sorte qu'on a

$$\psi(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=1,2,\ldots} k^{2p} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi.$$

Pour avoir la valeur des intégrales du second membre, partons de la formule

$$\begin{aligned}(\sin^{2p-1}\cos\varphi)' &= (2p-1)\sin^{2p-2}\varphi\cos^2\varphi - \sin^{2p}\varphi \\ &= (2p-1)\sin^{2p-2}\varphi - 2p\sin^{2p}\varphi,\end{aligned}$$

qui, intégrée entre o et $\frac{\pi}{2}$, donne

$$0 = (2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\varphi\, d\varphi - 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi.$$

Par le procédé de récurrence, on en tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\, \frac{1.3\ldots\overline{2p-1}}{2.4\ldots 2p},$$

et, par suite, en supposant toujours $k < 1$,

$$(5)\qquad \psi(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots\overline{2p-1}}{2.4\ldots 2p}\right)^2 k^{2p} + \ldots\right].$$

$\psi(k)$ est une fonction croissante de k; je dis que, *quand k tend*

vers 1, $\psi(k)$ *croît indéfiniment*. Reprenons la formule

$$\psi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Remarquons que, si l'on remplace k par 1, la fonction sous le signe $\int$ est $\frac{1}{\cos \varphi}$, dont la fonction primitive est

$$\mathrm{L}\left|\cot\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

et cette fonction croît indéfiniment quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Cela posé, considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (\varepsilon > 0,\ k^2 < 1).$$

Le dénominateur reste borné inférieurement, de sorte que cette intégrale est fonction continue du paramètre k, même pour $k = 1$; elle a donc pour limite, quand k tend vers 1, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

laquelle, si l'on a choisi ε assez petit, peut surpasser tout nombre donné. La fonction $\psi(k)$, supérieure à la valeur de l'intégrale I, peut donc surpasser tout nombre donné.

En résumé, la fonction $\psi(k)$, lorsque k varie de 0 à 1 (extrêmes exclus), va en croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

520. Cela posé, partons d'un système de deux nombres positifs arbitraires (ω, λ); construisons la fonction $p(u \mid \omega, i\lambda)$; elle satisfait à une équation de la forme

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p u - g_3 \qquad (g_2^3 - 27 g_3^2) > 0.$$

De g_2 et g_3 on déduit (n° 518) un système de deux nombres positifs (μ, k) $(k < 1)$ *qui peut être considéré comme fonction du système* (ω, λ). Ces quantités sont liées par les relations (3), (4),

qu'on peut mettre sous la forme

$$(6) \qquad \omega = \frac{1}{\mu}\psi(k), \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}\psi(\sqrt{1-k^2}).$$

On en déduit

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\psi(k)}{\psi(\sqrt{1-k^2})}.$$

Le second membre de cette relation est une fonction de k : quand k va de 0 à 1, le numérateur va de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$ en croissant, le dénominateur va de $+\infty$ à $\frac{\pi}{2}$ en décroissant ; le rapport va donc en croissant de 0 à $+\infty$. Par suite, en considérant inversement k comme fonction de $\frac{\omega}{\lambda}$, on voit que, *lorsque* $\frac{\omega}{\lambda}$ *va de* 0 *à* $+\infty$, k *prend une fois et une seule chaque valeur comprise entre* 0 *et* 1.

Si l'on fait varier maintenant ω et λ de manière que $\frac{\omega}{\lambda}$ reste fixe, la relation $\mu = \frac{1}{\omega}\psi(k)$ montre, k étant fixe, que μ *peut prendre toutes les valeurs positives possibles, chaque valeur étant obtenue pour une seule valeur de* ω.

En résumé, *si l'on attribue à l'avance à* μ *et* k *certaines valeurs positives et telles que* $k < 1$, *on peut trouver un et un seul système de nombres positifs* ω, λ *pour lequel les fonctions* μ, k, *précédemment définies, prennent ce système de valeurs.*

D'autre part, un système de nombres (μ, k) $(k < 1)$ détermine (n° 518) un polynome $4x^3 - g_2x - g_3$ de discriminant positif, et réciproquement.

Par conséquent, *si* ω *et* λ *varient de toutes les manières possibles, les invariants* g_2, g_3 *qui s'en déduisent prennent tous les systèmes de valeurs possibles pour lesquels on a* $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, *chaque système* (g_2, g_3) *étant obtenu pour un seul système* (ω, λ).
De là résulte la conséquence suivante :

Soit l'équation différentielle

$$(7) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \qquad [(g_2^3 - 27g_3^2) > 0].$$

Il existe un et un seul système (ω, λ) tel que la fonction pu correspondante satisfasse à cette équation ; ce système, étant unique, est nécessairement donné par les relations (1).

Donc, *étant donnée l'équation différentielle* (7), *la fonction* $p(u \mid \omega, \omega')$, *construite avec les demi-périodes*

$$(4) \qquad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \qquad \omega' = i\int_{e_3}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

où e_1 *et* e_3 *sont la plus grande et la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2x - g_3$, *satisfait à cette équation différentielle.*

La relation (7) pouvant se mettre sous la forme

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

on exprime le résultat en disant qu'*on effectue l'inversion de l'intégrale elliptique*

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Remarquons enfin que, pour calculer ω, λ, connaissant g_2, g_3, on se sert des formules (2) qui donnent μ et k, puis des formules (5) et (6).

521. Considérons maintenant le cas des périodes imaginaires conjuguées (n° 517). On a

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha - \beta i, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0,$$

$$(8) \qquad \alpha = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \qquad \beta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

e_2 étant l'unique racine réelle du dénominateur. Comme e_1, e_3 sont imaginaires conjuguées, nous poserons

$$(9) \qquad \begin{cases} e_2 - e_3 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \\ e_2 - e_1 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta). \end{cases}$$

Faisons d'abord, dans l'intégrale qui représente α, le changement de variable

$$x - e_2 = \rho t^2,$$

t allant de o à $+\infty$. On a alors

$$x - e_3 = \rho(t^2 + \cos\theta + i\sin\theta),$$

$$x - e_1 = \rho(t^2 + \cos\theta - i\sin\theta),$$

$$dx = 2\rho t\, dt,$$

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 4\rho^3 t^2[(t^2 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta],$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos\theta + t^4}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2 \sin^2\dfrac{\theta}{2}}}.$$

Posons maintenant

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = k^2, \qquad t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{dt}{1+t^2} = \frac{d\varphi}{2};$$

nous ferons varier φ de 0 à π. On peut alors écrire

$$2\alpha\sqrt{\rho} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

D'ailleurs, en faisant dans la dernière intégrale $\varphi = \pi - \varphi'$, φ' allant de $\frac{\pi}{2}$ à 0, on reconnaît que les deux dernières intégrales ont même valeur, d'où

$$(10) \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi(k).$$

Pour passer de α à β, il faut remplacer e_1, e_2, e_3 par $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$, ce qui revient à remplacer θ par $\theta - \pi$, ou $\sin^2\frac{\theta}{2}$ par $\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - k^2$. On a donc

$$(11) \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi(\sqrt{1-k^2}),$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\psi(k)}{\psi(\sqrt{1-k^2})}.$$

De même que précédemment (n° 520), on tire de ces formules les conséquences suivantes. Si $\frac{\alpha}{\beta}$ varie de 0 à $+\infty$, k prend une fois et une seule chaque valeur comprise entre 0 et 1; si α et β varient, $\frac{\alpha}{\beta}$ restant fixe, k reste fixe et ρ prend toutes les valeurs positives, cha-

cune étant obtenue pour une seule valeur de α. Par suite, *il y a un et un seul système de valeurs positives de α et β donnant à ρ et k un système de valeurs donné à l'avance* (k étant < 1).

D'autre part, un système (ρ, k) définit (par l'intermédiaire de l'angle θ), à l'aide des relations (9) et de l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, un système de nombres e_1, e_2, e_3 (e_2 réel, e_1, e_3 imaginaires conjugués) et, par suite, un polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ de discriminant négatif. Réciproquement, un tel polynome détermine un système (ρ, k).

On en déduit que, si les deux nombres positifs α, β varient de toutes les manières possibles, les invariants g_2, g_3 de la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\alpha + \beta i}{2}, \frac{\alpha - \beta i}{2}\right)$ prennent tous les systèmes de valeurs possibles pour lesquels on a $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$, chaque système (g_2, g_3) étant obtenu pour un seul système (α, β). Donc, *étant donnée l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \qquad [(g_2^3 - 27 g_3^2) < 0], \tag{12}$$

la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\alpha + \beta i}{2}, \frac{\alpha - \beta i}{2}\right)$ *telle que l'on a*

$$\alpha = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \beta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}},$$

e_2 étant la racine réelle de $4x^3 - g_2 x - g_3$, satisfait à cette équation.

Le calcul de α et β, connaissant g_2, g_3, se fait au moyen des formules (5), (10), (11).

522. En résumé, nous sommes parvenus à intégrer l'équation différentielle (7) ou (12) dans tous les cas où g_2 et g_3 sont réels (en supposant $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$). La fonction p obtenue se note

$$p(u; g_2, g_3).$$

On a donc

$$x = pu,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = p'u = \pm\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}.$$

Comme u n'intervient que par sa différentielle, on peut, dans la

solution, remplacer u par $u + c$, c étant une constante arbitraire.

Le résultat peut encore s'interpréter de la manière suivante : *Si l'on a deux variables x, y liées par une relation de la forme*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

g_2, g_3 étant réels et $g_2^3 - 27g_3^2$ étant différent de o, on peut trouver pour x et y des fonctions uniformes d'un paramètre u satisfaisant à cette relation ; il suffit pour cela de prendre

$$x = p(u; g_2, g_3), \qquad y = p'(u; g_2, g_3).$$

Ce résultat est à rapprocher de la théorie de la représentation unicursale des courbes.

Remarquons d'ailleurs que, dans le cas où $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$, l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dx}{du} = 2(x - a)\sqrt{x - b}.$$

On est ramené, pour l'intégrer, à effectuer la quadrature de la fonction $\frac{1}{(x-a)\sqrt{x-b}}$, qui se ramène aux fonctions rationnelles.

523. Considérons maintenant l'équation

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = P(x),$$

où A, B, C, D sont des coefficients réels quelconques. Pour ramener ce cas au précédent, effectuons sur x *la transformation à coefficients réels bien déterminée*

$$x = \lambda y + \mu,$$

telle que le polynome en y transformé de $P(x)$ ait 4 pour coefficient de x^3 et o pour coefficient de x^2. Posons aussi

$$u = \lambda v;$$

l'équation prend la forme suivante :

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

On l'intègre en prenant

$$y = p(v; g_2, g_3), \qquad \frac{dy}{dv} = p'(v; g_2, g_3),$$

et l'on en déduit, pour l'équation donnée,

$$x = \lambda\, p\left(\frac{u}{\lambda}; g_2, g_3\right) + \mu, \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{P(x)} = p'\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

524. Prenons le cas de l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z),$$

R étant un polynome du quatrième degré à coefficients réels admettant des racines réelles. Supposons qu'on détermine une racine réelle z_0 de ce polynome ; soit alors

$$R(z) = (z - z_0) f(z).$$

Posons

$$z = z_0 + \frac{1}{x}, \qquad dz = -\frac{dx}{x^2};$$

l'équation donnée devient

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^4},$$

P étant du troisième degré ; on est ramené à l'équation

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = P(x).$$

C'est le cas qui vient d'être traité (n° 523). x s'exprime en fonction elliptique de u ; il en est donc de même de z et de $\frac{dz}{du} = \sqrt{R(z)}$.

525. Nous allons indiquer une autre méthode pour l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z),$$

dans le cas où $R(z)$ est un polynome réel du quatrième degré dont le coefficient de z^4 est positif.

Remarquons que le cas qui échappe à la méthode du n° 524, à savoir le cas où R a ses quatre racines imaginaires, est compris dans le cas

actuel : en effet, le polynome ayant alors un signe constant pour les valeurs réelles de z, si ce signe est $-$, l'équation n'est vérifiée pour aucun système de valeurs réelles, nous ne nous en occuperons pas. Si le signe est $+$, c'est que le coefficient de z^4 est positif.

Par une transformation de la forme

$$z = \lambda z_1 + \mu,$$

λ et μ étant *réels*, on peut remplacer l'équation donnée par une autre de même forme, où le coefficient de z^4 sera 1 et où le coefficient de z^3 sera nul. Nous sommes ramenés au problème suivant.

Étant donnée une relation de la forme

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = z'^2 = \mathrm{R}(z) = z^4 + 6\lambda_2 z^2 + 4\lambda_3 z + \lambda_4,$$

nous allons chercher pour z et z' des fonctions elliptiques de u vérifiant cette relation. Prenons

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' a}{\wp u - \wp a};$$

nous allons montrer que la fonction $\wp$ et la constante a peuvent être déterminées de manière que cette fonction satisfasse à la relation précédente. Rappelons la formule générale d'addition [n° 508, formule (9), p. 509],

$$\wp u + \wp a + \wp(u + a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' a}{\wp u - \wp a}\right)^2,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\wp u + \wp a + \wp(u + a) = z^2.$$

Nous avons obtenu la formule [n° 508, (8)]

$$\wp u - \wp(u + a) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\left(\frac{\wp' u - \wp' a}{\wp u - \wp a}\right),$$

ou, avec les notations actuelles,

$$(2) \qquad \wp u - \wp(u + a) = z'.$$

De (1) nous déduisons

$$z' = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'' u(\wp u - \wp a) - \wp' u(\wp' u - \wp' a)}{(\wp u - \wp a)^2}$$

Remplaçons, en tenant compte de la valeur de z, $p'u - p'a$ par $2z(pu - pa)$: il vient

$$z' = \frac{1}{2}\,\frac{p''u - 2z\,p'u}{pu - pa},$$

d'où, d'après (2),

$$(3)\qquad pu - p(u+a) = \frac{1}{2}\,\frac{p''u - 2z\,p'u}{pu - pa}.$$

Posons, pour la suite du calcul,

$$A = pu - pa, \qquad B = p(u+a) - pa.$$

Dans (3), permutons u et a ; en remarquant que z ne change pas, nous obtenons

$$(4)\qquad pa - p(u+a) = -\frac{1}{2}\,\frac{p''a - 2z\,p'a}{pu - pa}.$$

Nous pouvons écrire

$$A + B = pa + pu + p(u+a) - 3pa,$$

d'où, en tenant compte de la valeur de z^2,

$$A + B = z^2 - 3pa.$$

Calculons de même AB. En comparant avec la formule (4) mise sous forme entière, on reconnaît que l'on a

$$A.B = \frac{1}{2}(p''a - 2z\,p'a).$$

D'ailleurs, on a aussi, d'après (2),

$$z'^2 = [pu - p(u+a)]^2 = (A - B)^2,$$

ou

$$z'^2 = (A + B)^2 - 4AB = (z^2 - 3pa)^2 - 2(p''a - 2z\,p'a).$$

Nous voyons ainsi que z'^2 est égal à un polynome du quatrième degré en z. Cette relation n'est autre qu'une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction elliptique z, définie par la formule (1). En développant, nous avons

$$z'^2 = z^4 - 6pa\,z^2 + 4p'a\,z + 9p^2a - 2p''a,$$

ou, en remplaçant $\mathrm{p}''a$ par $6\,\mathrm{p}^2a - \frac{g_2}{2}$,

$$z^4 - 6\,\mathrm{p}a\,z^2 - 4\,\mathrm{p}'a\,z - 3\,\mathrm{p}^2a + g_2.$$

Nous allons chercher une fonction elliptique $\mathrm{p}u$ et une constante a telles qu'il y ait identité entre les polynomes

$$z^4 + 6\lambda_2 z^2 - 4\lambda_3 z + \lambda_4$$

et

$$z^4 - 6\,\mathrm{p}a\,z^2 - 4\,\mathrm{p}'a\,z - 3\,\mathrm{p}^2a + g_2.$$

Cela exige que l'on ait

$$\mathrm{p}a = -\lambda_2, \qquad \mathrm{p}'a = \lambda_3, \qquad -3\,\mathrm{p}^2a + g_2 = \lambda_4.$$

Prenons comme inconnues les invariants g_2, g_3 de la fonction p cherchée. De la dernière relation on tire, en tenant compte de la première,

$$g_2 = \lambda_4 + 3\,\mathrm{p}^2a = \lambda_4 + 3\lambda_2^2.$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{p}'^2a = 4\,\mathrm{p}^3a - g_2\,\mathrm{p}a - g_3,$$

d'où

$$\lambda_3^2 = -4\lambda_2^3 + \lambda_2(\lambda_4 + 3\lambda_2^2) - g_3, \qquad g_3 = \lambda_2\lambda_4 - \lambda_2^3 - \lambda_3^2.$$

g_2 et g_3 sont ainsi déterminés; la constante a est déterminée par les deux relations

$$\mathrm{p}a = -\lambda_2, \qquad \mathrm{p}'a = \lambda_3$$

qui sont compatibles, car, en vertu du calcul fait, on peut en déduire

$$\mathrm{p}'^2a = 4\,\mathrm{p}^3a - g_2\,\mathrm{p}a - g_3;$$

par suite, elles déterminent un nombre a à une combinaison linéaire des périodes près. En effet, dans un parallélogramme de périodes, la fonction $\mathrm{p}u$ prend deux fois la valeur déterminée $-\lambda_2$ pour deux valeurs différentes de u, ces valeurs étant congrues à deux nombres opposés. Pour ces deux nombres opposés, $\mathrm{p}'u$ prend deux valeurs opposées et, par conséquent, différentes. L'une de ces valeurs sera égale à λ_3; la valeur correspondante de l'argument sera la constante cherchée a.

La fonction pu et la constante a étant déterminées, la fonction

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa}$$

est telle que l'on a

$$\frac{dz}{du} = pu - p(u + a) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z);$$

z et $\frac{dz}{du} = \sqrt{R(z)}$ s'expriment tous deux en fonctions elliptiques de u.

526. On appelle *intégrale elliptique* une intégrale de la forme

$$\int F\left[x, \sqrt{P(x)}\right] dx,$$

P étant un polynome du troisième ou du quatrième degré n'ayant pas de racines multiples et F une fonction rationnelle. Nous supposerons, de plus, les coefficients et les variables réels. Posons

$$X = \sqrt{P(x)}.$$

On peut (nos 522 à 525) exprimer x et X en fonctions rationnelles de pu et $p'u$, pu étant convenablement choisi. L'élément différentiel de l'intégrale prend alors la forme $\Phi(pu, p'u)\,du$, Φ étant rationnel. Posons alors

$$z = pu, \qquad y = p'u.$$

Φ, étant une fonction rationnelle par rapport à z et à y, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi = \frac{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots}{B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots},$$

$A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ étant des polynomes en z. Remplaçons y^2 par le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$: Φ prend la forme

$$\Phi = \frac{A + By}{C + Dy}.$$

Multiplions et divisons le second membre par $C - Dy$. Le dénominateur $C^2 - D^2 y^2$ s'exprime rationnellement en z; la fraction se ramène à la forme

$$R + Sy.$$

R et S étant rationnels en z. L'intégrale à calculer est

$$\int R(pu)\,du + \int S(z)\,p'u\,du.$$

Comme on a $p'u\,du = dz$, la seconde intégrale s'écrit

$$\int S(z)\,dz\,;$$

c'est une intégrale de fraction rationnelle que l'on sait évaluer.

En prenant u comme nouvelle variable, nous sommes donc ramenés à évaluer l'intégrale

$$\int R(pu)\,du,$$

où R est une fonction rationnelle de pu.

$R(pu)$ constitue une fonction elliptique aux mêmes périodes que pu. Appliquant à cette fonction la décomposition en une somme de fonctions ζ, ζ', ... (n° 509, p. 310), on a une formule de la forme

$$R(pu) = c + \sum \Big[A\,\zeta(u-a) + A_1\,\zeta'(u-a) + A_2\,\zeta''(u-a) + \ldots \Big],$$

c étant une constante et le signe $\sum$ étant étendu aux différents pôles $a, b, \ldots, l$ de la fonction R. En intégrant, on déduit de là

$$\int R(pu)\,du = cu + \sum \Big[A\,\mathrm{Log}\,\sigma(u-a) + A_1\,\zeta(u-a) + A_2\,\zeta'(u-a) + \ldots \Big].$$

La théorie des fonctions elliptiques fournit ainsi l'expression d'une intégrale elliptique.

VII. — Courbes de genre *un*.

527. Considérons la fonction elliptique pu, et posons

$$(1) \qquad x = pu, \qquad y = p'u.$$

Nous avons vu que x et y sont liés par la relation suivante :

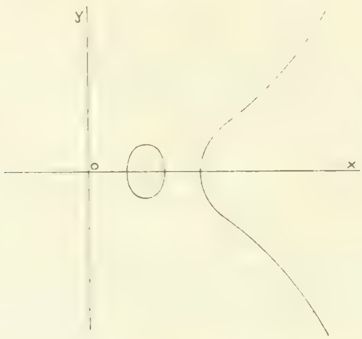
$$(2) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

En nous bornant au cas où g_2 et g_3 sont réels, nous savons

construire la courbe représentée par cette équation en coordonnées rectangulaires. C'est une cubique ayant pour axe de symétrie l'axe des x et pour direction asymptotique l'axe des y.

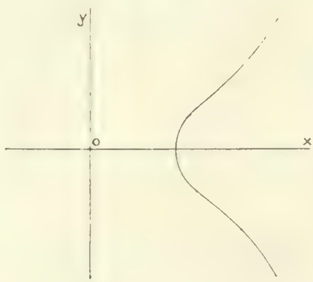
Si l'on a $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, auquel cas le polynome a trois racines réelles, la courbe rencontre l'axe des x en trois points (*fig.* 50).

Fig. 50.



Si $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$, auquel cas le polynome n'a plus qu'une racine réelle, la courbe ne rencontre l'axe des x qu'en un point réel (*fig.* 51).

Fig. 51.



A une valeur de u correspond un point de la courbe. Inversement, soit (x_0, y_0) un point de la courbe, c'est-à-dire un système de valeurs de x_0 et y_0 satisfaisant à (2). Cherchons combien il y a de valeurs de u correspondant à ce point.

Étant donnée une valeur x_0 attribuée à x, il y a dans un parallélogramme de périodes deux points u pour lesquels $pu = x_0$. Ces deux valeurs de u sont congrues à deux nombres opposés u_0 et $-u_0$ et donnent à $y = p'u$ deux valeurs différentes, dont l'une seulement

est égale à la valeur choisie y_0. Donc, *à un système de valeurs* (x_0, y_0) *vérifiant* (2) *correspond, à une combinaison linéaire près des périodes, une seule valeur de* u. On exprime ce fait en disant qu'*il y a correspondance entre le paramètre* u *et les points de la courbe*.

528. Donnons quelques applications géométriques de la théorie des fonctions elliptiques.

Cherchons la condition pour que trois points de la cubique correspondant respectivement aux valeurs u_1, u_2, u_3 du paramètre soient en ligne droite. Cherchons l'intersection de la courbe avec la droite d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

L'équation aux paramètres des points d'intersection est

$$a\,p u + b\,p' u + c = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction elliptique aux mêmes périodes que pu, $p'u$ et n'a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine, d'autre pôle que l'origine, lequel est pôle d'ordre *trois*. Cette fonction elliptique a, par suite, trois zéros dans un parallélogramme de périodes. De plus, la somme des zéros est congrue à celle des pôles; la somme des pôles étant nulle, si u_1, u_2, u_3 sont les trois zéros, on a, m et n étant entiers,

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2m\omega + 2n\omega'.$$

Telle est la relation à laquelle satisfont les paramètres de trois points de la courbe situés en ligne droite. Je dis que cette condition qui est nécessaire est aussi suffisante, c'est-à-dire que, *si elle est remplie pour trois paramètres, les trois points correspondants sont en ligne droite*.

En effet, considérons la droite D qui joint les points de paramètres u_1, u_2: elle rencontre la cubique en un troisième point autre que u_1, u_2. Soit u'_3 le paramètre de ce point; nous avons

$$u_1 + u_2 + u'_3 \equiv 0.$$

En comparant cette relation avec celle qui existe par hypothèse entre u_1, u_2, u_3, on voit que u_3 et u'_3 sont congrus. Donc u_3 et

u'_3 correspondent au même point de la courbe. La droite qui joint u_1, u_2 passe par u_3, ce que nous voulions démontrer.

Considérons sur la courbe un point de paramètre u; la tangente à la courbe en ce point la rencontre en un autre point de paramètre v. En considérant cette tangente comme la position limite d'une sécante passant par u et par un second point voisin u_1 qui se rapproche indéfiniment de u, on voit qu'on doit avoir

$$2u + v = 2m\omega + 2n\omega'.$$

Cherchons à quelle condition u sera point d'inflexion pour la cubique: il faut que la tangente en ce point rencontre la courbe en trois points confondus avec le point de contact. Il faut pour cela qu'on ait

$$v = u,$$

d'où la condition

$$3u = 2m\omega + 2n\omega',$$

$$u = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}.$$

On reconnaît que, pour avoir tous les points d'inflexion, il suffit de donner à m et n trois valeurs entières consécutives, par exemple 0, 1, 2, et de prendre toutes les combinaisons de ces valeurs deux à deux. Ces combinaisons étant au nombre de neuf, il y a neuf points d'inflexion.

529. Considérons d'une façon générale une cubique plane. On démontre qu'une telle courbe ne peut avoir plus d'un point double sans se décomposer. Si elle a un point double, elle est unicursale. Nous mettrons à part ces cas, et nous étudierons les cubiques planes sans point double.

Étant donnée une telle courbe, plaçons l'origine en un point de la courbe; son équation sera de la forme

$$\varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) = 0,$$

φ_3, φ_2, φ_1 étant des polynomes homogènes et de degrés respectifs 3, 2, 1. Coupons la courbe par une droite passant par l'origine, d'équation $y = tx$. L'équation aux abscisses des points d'intersection autres que l'origine est

$$x^2\varphi_3(1, t) + x\varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-\varphi_2 \pm \sqrt{\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_3}}{2\varphi_1};$$

$\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_3$ est un polynome du quatrième degré en t, soit $R(t)$. On sait, au moyen de la théorie des fonctions elliptiques, exprimer t et $\sqrt{R(t)}$ au moyen de fonctions elliptiques d'un même paramètre u. *Nous pouvons donc exprimer les coordonnées d'un point de la courbe par des fonctions uniformes d'un paramètre u.*

530. *Courbes planes de genre* un. — On démontre, en Géométrie analytique, que le nombre maximum de points doubles d'une courbe plane de degré n, qui ne se décompose pas, est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. On démontre en second lieu qu'une courbe de degré n qui a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles est unicursale, c'est-à-dire que les coordonnées d'un de ses points peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles d'un paramètre; la réciproque est vraie.

Étant donnée une courbe de degré n qui a d points doubles, on appelle *genre* de cette courbe le nombre

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

de sorte que les courbes unicursales sont les courbes de genre *zéro*. *Nous allons étudier les courbes de genre* un. Le nombre de leurs points doubles est

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Soit C une telle courbe, ayant pour équation

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Nous allons introduire des courbes auxiliaires d'ordre $n-2$, que nous appellerons des *adjointes*. Rappelons qu'une courbe d'ordre n est déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ conditions linéaires, de sorte qu'une courbe d'ordre $n-2$ est déterminée par $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points. Assujettissons une adjointe à passer par les $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles de C.

Il faut encore, pour la déterminer, un nombre de points égal à

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = n-1.$$

Si donc nous assujettissons cette adjointe à passer en outre par $(n-3)$ points simples choisis arbitrairement sur C, il restera dans son équation deux paramètres linéaires arbitraires. Elle sera de la forme

$$\mathrm{A}f_1(x,y) + \mathrm{B}f_2(x,y) + \mathrm{C}f_3(x,y) = 0,$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions déterminées, A, B, C des paramètres arbitraires. On a ainsi *un réseau de courbes adjointes.*

Étudions l'intersection d'une courbe γ de ce réseau avec C. Ces deux courbes étant d'ordres n et $n-2$, le nombre de leurs points d'intersection est, d'après le théorème de Bezout, $n(n-2)$. Or, en chaque point double de C, il y a deux points de l'intersection confondus, d'où $n(n-3)$ points d'intersection fixes. De même, les $n-3$ points simples de C par lesquels passe γ donnent $n-3$ points d'intersection fixes. Le nombre d'intersections qui restent, et qui sont les intersections variables, est

$$n(n-2) - n(n-3) - (n-3) = 3.$$

Ainsi, C et γ *ont trois points d'intersection variables.* Cela étant, posons

$$(2) \qquad x' = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}, \qquad y' = \frac{f_3(x,y)}{f_1(x,y)}.$$

A un point (x,y) correspond, moyennant ces formules, un point (x',y'). Quand le point (x,y) décrit C, le point (x',y') décrit une courbe C' dont l'équation s'obtiendrait en éliminant x, y entre les équations (1) et (2).

Inversement, je dis qu'*à un point* (x',y') *de* C' *correspond un point* (x,y) *de* C *et un seul,* c'est-à-dire que, x', y' étant donnés, les équations (2) jointes à (1) n'ont en x, y qu'un seul système de solutions variable avec x', y'.

En effet, supposons qu'il existe deux points (a,b), (a',b') correspondant au même point (x',y') et variant d'une façon continue avec x' y'; on aura

$$\frac{f_2(a,b)}{f_1(a,b)} = \frac{f_2(a',b')}{f_1(a',b')}, \qquad \frac{f_3(a,b)}{f_1(a,b)} = \frac{f_3(a',b')}{f_1(a',b')},$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{f_1(a',b')}{f_1(a,b)} = \frac{f_2(a',b')}{f_2(a,b)} = \frac{f_3(a',b')}{f_3(a,b)}.$$

Considérons le réseau des courbes γ et assujettissons les courbes de ce réseau à passer par (a,b). Nous déterminons ainsi dans le réseau un faisceau γ_1. En vertu de (3), toute courbe du réseau qui contient (a,b) contient aussi (a',b'). Les courbes de γ_1 contenant (a,b) et (a',b') ne rencontrent donc C qu'en $3-2$, c'est-à-dire un point variable. Comme l'équation de ces courbes dépend linéairement d'un paramètre, on pourrait exprimer les coordonnées de ce point en fonctions rationnelles du paramètre. C serait donc une courbe unicursale, ce qui n'est pas, puisque C n'a pas son nombre maximum de points doubles.

Donc il ne peut correspondre à un point (x',y') de C' qu'un seul point (a,b), et, par suite, les équations (2) n'ont qu'un seul système de solutions en x, y variable avec x', y'. On peut obtenir par des opérations rationnelles ce système de solutions, soit

$$x = \varphi_1(x',y'), \qquad y = \varphi_2(x',y'),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions rationnelles. On dit qu'*il y a entre les deux courbes* C *et* C' *une correspondance biunivoque et birationnelle.*

Cherchons le degré de C'. Prenons son intersection avec la droite d'équation

$$Ax' + By' + C = 0.$$

En remplaçant x', y' par leurs valeurs en fonction de x, nous sommes conduits à l'équation

$$Af_2(x,y) + Bf_3(x,y) + Cf_1(x,y) = 0,$$

x, y étant liés par l'équation de la courbe C,

$$F(x,y) = 0.$$

Nous savons que ces deux équations ont, en dehors des points de base du réseau, trois systèmes de solutions variables. C', étant rencontré par une droite quelconque en trois points, est donc du troisième degré.

En résumé, nous voyons qu'*il est possible d'établir une correspondance biunivoque et birationnelle entre une courbe quelconque de genre* un *et une certaine courbe du troisième degré*. Comme d'autre part les coordonnées d'un point d'une cubique peuvent s'exprimer en fonctions elliptiques d'un paramètre, il en est donc de

même pour les coordonnées d'un point de la courbe de genre *un*. *On peut exprimer les coordonnées d'un point d'une courbe de genre* UN *en fonctions elliptiques d'un paramètre.*

531. *Remarque.* — Soit une courbe unicursale; exprimons les coordonnées d'un de ses points en fonctions rationnelles d'un paramètre t et posons $t = \varphi(u)$, φ étant une fonction elliptique. x et y sont ainsi exprimés en fonctions elliptiques du paramètre u. Je dis que cette représentation ne possède pas toutes les propriétés de la représentation obtenue pour les courbes de genre *un*.

Considérons une courbe de genre *un*; faisons-la correspondre à une cubique plane que nous pouvons faire correspondre elle-même à la courbe

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Les coordonnées x, y d'un point de cette courbe s'expriment au moyen de deux fonctions elliptiques. Dans un parallélogramme de périodes commun à ces deux fonctions, *à un point de la courbe donnée correspond un seul point u et inversement.* Une telle représentation est dite *propre*.

Montrons qu'elle ne peut exister pour une courbe unicursale. En effet, la courbe étant unicursale, x, y sont fonctions rationnelles d'un paramètre t, et, inversement, t est fonction rationnelle de x, y, de sorte que, si x et y sont fonctions elliptiques d'un paramètre u, t sera aussi fonction elliptique de u. Cette fonction aura pour périodes tout système de périodes commun à x et y; et, dans un parallélogramme de périodes, à une valeur de t, c'est-à-dire à un point de la courbe, correspondent au moins deux valeurs de u. Autrement dit, *il est impossible de trouver un parallélogramme de périodes tel qu'à un point de la courbe corresponde une seule valeur de u dans ce parallélogramme.* C'est ce qu'on exprime en disant que la représentation obtenue est *impropre*.

VIII. — Équation d'Euler.

532. On appelle *équation d'Euler* une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} = 0, \tag{1}$$

R étant un polynome du troisième ou du quatrième degré.

Remarquons que, si R est du premier ou du deuxième degré, cette équation a une solution qui est algébrique. Supposons par exemple $R(\lambda)$ du deuxième degré : nous pouvons, par une transformation linéaire, ramener $R(\lambda)$ à la forme

$$R(\lambda) = 1 - \lambda^2.$$

L'équation à intégrer est alors

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{arc}\sin\lambda \pm \operatorname{arc}\sin\mu = \text{const.}$$

Posons

$$\operatorname{arc}\sin\lambda = u, \qquad \operatorname{arc}\sin\mu = v;$$

l'intégrale est

$$u \pm v = \text{const.},$$

d'où

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \sin v \cos u = \text{const.},$$

$$\lambda\sqrt{1-\mu^2} \pm \mu\sqrt{1-\lambda^2} = \text{const.}$$

En faisant disparaître les radicaux, on obtient entre λ et μ une relation algébrique entière qui est l'intégrale cherchée.

533. Supposons maintenant R du troisième ou du quatrième degré et posons

$$u = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad v = \int \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}};$$

on tire de là, en faisant l'inversion de l'intégrale,

$$\lambda = f(u), \qquad \mu = f(v),$$

f étant une certaine fonction elliptique. D'ailleurs, avec les nouvelles variables u, v, l'équation différentielle s'écrit

$$du \pm dv = 0,$$

d'où

$$u \pm v = \text{const.} = c,$$

$$v = \pm(c - u),$$

$$\mu = f[\pm(c - u)].$$

$f[\pm(c-u)]$, en tant que fonction de u, est une certaine fonction elliptique $f_1(u)$. Entre les deux fonctions $\lambda = f(u)$, $\mu = f_1(u)$ aux mêmes périodes existe une relation algébrique. Ainsi, *la solution générale de* (1) *est donnée par une relation algébrique entre* λ *et* μ.

534. Cherchons la forme de cette relation. Partons d'une relation symétrique en λ et μ et du deuxième degré par rapport à chacune de ces variables, soit

$$F(\lambda, \mu) = 0. \tag{2}$$

ou, en ordonnant par rapport à μ,

$$F(\lambda, \mu) = (A\lambda^2 + B\lambda + C)\mu^2 + (B\lambda^2 + D\lambda + E)\mu + C\lambda^2 + E\lambda + F = 0.$$

En différentiant cette équation, nous avons

$$F'_\lambda d\lambda + F'_\mu d\mu = 0, \tag{3}$$

ce qui définit le rapport $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Calculons, par exemple, F'_μ,

$$F'_\mu = 2\mu(A\lambda^2 + B\lambda + C) + B\lambda^2 + D\lambda + E.$$

Résolvons d'autre part $F(\lambda, \mu) = 0$ par rapport à μ; nous avons

$$\mu = \frac{-(B\lambda^2 + D\lambda + E) \pm \sqrt{R(\lambda)}}{2(A\lambda^2 + B\lambda + C)},$$

$R(\lambda)$ étant un polynome du quatrième degré en λ. On reconnaît que l'on a

$$F'_\mu = \pm\sqrt{R(\lambda)};$$

on obtiendrait de même

$$F'_\lambda = \pm\sqrt{R(\mu)}.$$

La relation différentielle (3) peut donc s'écrire

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} = 0; \tag{4}$$

c'est précisément une relation de la forme (1).

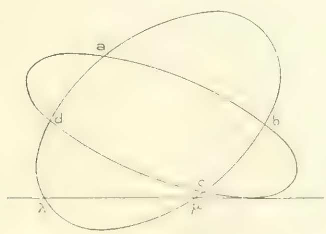
Je dis que l'équation (2) constitue l'intégrale générale de (4).

Cela résulte de ce que dans $F(\lambda, \mu)$ il y a cinq paramètres arbitraires, tandis qu'il n'y en a que quatre dans R. F contenant un paramètre de plus que R, on pourra disposer de ce paramètre pour faire correspondre à une valeur donnée λ_0 de λ une valeur arbitraire μ_0 de μ.

$F(\lambda, \mu) = 0$ est donc l'intégrale générale de l'équation d'Euler. Il reste à faire le calcul des coefficients de F, en supposant connus ceux de R. Pour cela, nous ferons usage de l'interprétation géométrique suivante.

535. *Interprétation géométrique.* — Donnons-nous une conique C et exprimons les coordonnées de l'un de ses points en fonction rationnelle d'un paramètre t. Soit γ une autre conique qui coupe la première en quatre points distincts correspondant respectivement aux valeurs a, b, c, d du paramètre. Désignons ces quatre points par les mêmes lettres a, b, c, d (*fig.* 52).

Fig. 52.



Cela étant, prenons sur C deux points de paramètres λ, μ, et cherchons la condition pour que la droite qui les joint soit tangente à γ. La relation entre λ et μ qui exprime cette condition doit être algébrique et symétrique en λ et μ. De plus, à une valeur donnée de λ correspondent deux valeurs de μ, car par un point de C on peut mener deux tangentes à γ, et à chacune de ces tangentes correspond un point μ. Donc cette relation est de la forme étudiée au n° 534, soit

$$F(\lambda, \mu) = 0.$$

Je dis que les racines du polynome $R(\lambda)$ qui se déduit de F par le procédé du n° 534 sont les paramètres a, b, c, d des points communs à C et à γ. En effet, chaque racine de $R(\lambda)$ est telle que les deux valeurs de μ correspondantes sont confondues en une seule. Les deux

tangentes à γ issues de ce point λ sont confondues. Donc ce point appartient à γ.

Il résulte de là que, si γ varie en passant par les mêmes points a, b, c, d, $F(\lambda, \mu)$ varie, mais les quatre racines de $R(\lambda)$ restent invariables : la relation différentielle entre λ et μ reste donc aussi la même.

On peut déduire de là un moyen pratique pour former $F(\lambda, \mu)$, étant donnée l'équation (1), c'est-à-dire $R(\lambda)$. On considère une conique C définie en fonction d'un paramètre t, et l'on prend les points de cette conique correspondant aux valeurs du paramètre qui sont racines de $R(\lambda)$. Ces quatre points déterminent un faisceau de coniques γ. On exprime que la droite passant par les points λ, μ de C est tangente à une conique γ. La relation obtenue est l'intégrale cherchée.

336. On peut rattacher à cette méthode un théorème classique de Géométrie. Prenons sur C quatre points a, b, c, d et considérons plusieurs coniques $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$, passant par ces quatre points. Soit A_1 un point de C; menons par A_1 une tangente à γ_1, elle coupe C en un second point A_2; par A_2 menons une tangente à γ_2, elle coupe C en un second point A_3, et ainsi de suite. Nous arrivons finalement à un point A_{n-1} par lequel nous menons une tangente à γ_{n-1} : cette tangente coupe C en un second point A_n. Je dis que *la droite* $A_n A_1$ *obtenue en joignant le dernier point au premier enveloppe une nouvelle conique* γ_n *passant par* a, b, c, d.

En effet, soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les valeurs du paramètre correspondant à $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Du fait que la droite $A_1 A_2$ est tangente à γ_1 résulte que l'on a

$$\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}} = \varepsilon_1 \frac{dt_2}{\sqrt{R(t_2)}},$$

ε_1 étant égal à ± 1 et gardant un signe déterminé si t_1, t_2 varient d'une façon continue. De même, $A_2 A_3$ étant tangente à γ_2, on a

$$\frac{dt_2}{\sqrt{R(t_2)}} = \varepsilon_2 \frac{dt_3}{\sqrt{R(t_3)}}$$

et finalement

$$\frac{dt_{n-1}}{\sqrt{R(t_{n-1})}} = \varepsilon_{n-1} \frac{dt_n}{\sqrt{R(t_n)}}.$$

On a, en multipliant ces relations membre à membre,

$$\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}} = \frac{dt_n}{\sqrt{R(t_n)}}.$$

Ceci montre qu'entre t_1 et t_n existe une relation algébrique de la forme $F(\lambda, \mu) = 0$. Donc *la droite* $A_1 A_n$ *qui joint les deux points de paramètres* t_1, t_n *est tangente à une conique passant par* a, b, c, d.

FIN DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
40731 Quai des Grands-Augustins, 55.